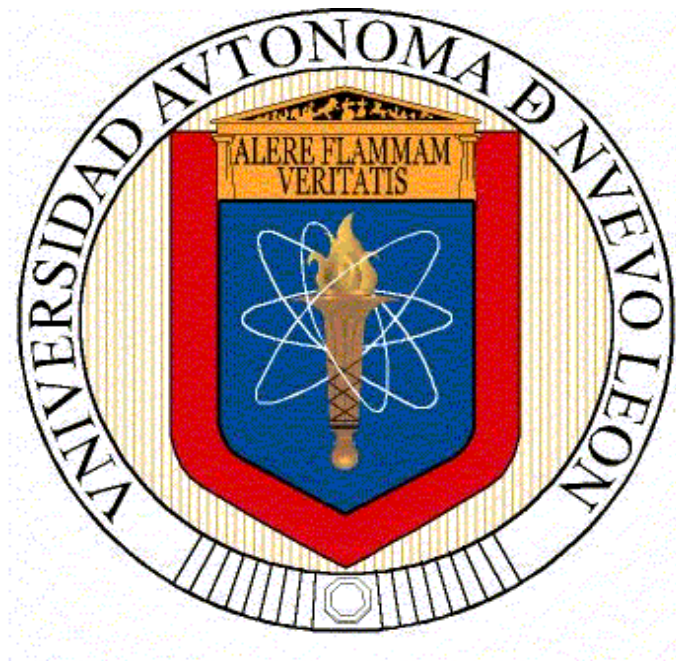


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



TESIS

**CONTROL PARA SISTEMAS LPV BASADO EN LA
PARAMETRIZACIÓN DE CONTROLADORES
ESTABILIZANTES**

POR

MIGUEL ANGEL FLORES GUERRERO

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN
CONTROL AUTOMÁTICO**

NOVIEMBRE DE 2013

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

**CONTROL PARA SISTEMAS LPV BASADO EN LA
PARAMETRIZACIÓN DE CONTROLADORES
ESTABILIZANTES**

POR

MIGUEL ANGEL FLORES GUERRERO

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN EN
CONTROL AUTOMÁTICO**

NOVIEMBRE DE 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Control para sistemas LPV basado en la parametrización de controladores estabilizantes**” realizada por **Miguel Angel Flores Guerrero**, matrícula número **1609593**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático**.

El Comité de Tesis

Asesor
Dr. René Galindo Orozco

Revisor
Dr. Daniel Melchor Aguilar

Revisor
Dr. Alberto Cavazos González

Vo. Bo.
Dr. Moisés Hinojosa Rivera
División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, N.L.

Noviembre de 2013

Resumen

Control para sistemas LPV basado en la parametrización de controladores estabilizantes

Publicación No. _____

Miguel Angel Flores Guerrero

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. René Galindo Orozco

Noviembre de 2013

Este trabajo se enfoca en el estudio del control de sistemas Multi-Entrada Multi-Salida (MIMO) Lineales con Parámetros Variantes en el Tiempo (LPV). Los parámetros son medibles y permanecen dentro de cotas conocidas. El control por retroalimentación de salida garantiza estabilidad cuadrática (QS) y desempeño, mediante el Teorema de los vértices y el Lema de Cota Real (BRL). Se proponen condiciones para que el sistema retroalimentado sea convexo cuando se utilizan controladores estabilizantes en cada vértice. El controlador LPV resulta de la interpolación de estos controladores, y se estudia la relación entre la estabilidad y el desempeño del control de los vértices, y la estabilidad y desempeño del sistema LPV. Además, se da una forma explícita del parámetro libre de la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE) que resuelve un criterio de sensibilidad mezclada cuando se tiene un modelo de incertidumbre aditivo a la salida. Los resultados se aplican a un robot planar rotacional de dos grados de libertad, a un motor de CD y a un sistema de dos masas.

Contenido

Lista de tablas	xI
Nomenclatura	xII
1 Introducción	1
1.1 Introducción	1
1.2 Estado del arte	2
1.3 Objetivo	3
1.4 Hipótesis	4
1.5 Metodología	4
1.6 Estructura de la Tesis	5
2 Antecedentes	6
2.1 Introducción	6
2.2 Sistemas LPV	7
2.2.1 Estabilidad Cuadrática	7
2.2.1.1 Estabilidad cuadrática por retroalimentación de salida	9
2.2.2 Desempeño	10
2.2.2.1 Desempeño por retroalimentacion de salida	12
2.2.3 Algoritmo de interpolación	13
2.2.4 Cálculo de coordenadas politópicas	13
2.3 Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes	14
2.4 Control Robusto y Sensibilidad Mezclada	18
2.5 Conclusiones	22
3 Estabilidad cuadrática y desempeño \mathcal{L}_2 en lazo cerrado	23
3.1 Introducción	23
3.2 Estabilidad cuadrática	23
3.3 Desempeño \mathcal{L}_2 en lazo cerrado	28

3.4	PTCE para modelos de incertidumbre aditivos	28
3.5	Cálculo de coordenadas politópicas	31
3.6	Robot planar rotacional de dos grados de libertad	32
3.7	Motor de CD	41
3.8	Sistema de dos masas	49
3.9	Conclusiones	54
4	Conclusiones generales y trabajos futuros	55
4.1	Conclusiones	55
4.2	Trabajos futuros	56
5	Apéndice	57
5.1	Modelo Hamiltoniano	57
5.1.1	Hamiltoniano para RPR de 2 DOF	58
5.1.2	Hamiltoniano para sistema de dos masas	59
5.2	Artículo	60

Lista de figuras

2.1	Configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$	15
2.2	Configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$ de dos parámetros.	16
2.3	Teorema de pequeñas ganancias.	20
3.1	Configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de un parámetro.	25
3.2	Configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de dos parámetros.	25
3.3	Intersección de las rectas descritas en función de los parámetros a y q	30
3.4	Descripción en coordenadas del RPR de 2DOF.	33
3.5	Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$ de un parámetro para los vértices.	35
3.6	Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$ de dos parámetros para los vértices.	36
3.7	Trayectoria paramétrica para RPR de 2DOF.	38
3.8	Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de un parámetro.	38
3.9	Ley de control $u(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de un parámetro.	39
3.10	Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de dos parámetros.	39
3.11	Ley de control $u(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de dos parámetros.	40
3.12	Diagrama a bloques del prototipo de laboratorio del motor de CD	41
3.13	Prototipo de laboratorio del motor de CD (izquierda), motor de CD y encoder (derecha)	41

3.14	$w_r(t)$ en <i>rpm</i> del motor de CD y del modelo LPV para referencias escalón cada 5 segundos	43
3.15	$w_r(t)$ en <i>rpm</i> del motor de CD y del modelo LPV para una referencia sinusoidal	43
3.16	Configuración retroalimentada con un controlador de un parámetro para motor de CD	45
3.17	Hipercaja formada por los parámetros del motor de CD k y τ	46
3.18	Resultados experimentales de $w_r(t)$ para entradas escalón de referencia.	47
3.19	Resultados experimentales de $V_a(t)$ para entradas escalón de referencia.	47
3.20	Resultados experimentales de $w_r(t)$ para entradas escalón de referencia.	48
3.21	Resultados experimentales de $V_a(t)$ para entradas escalón de referencia.	48
3.22	Sistema de dos masas	49
3.23	Trayectoria paramétrica para sistema de dos masas.	51
3.24	Posiciones $x(t)$ para para los vértices del sistema de dos masas. . . .	51
3.25	Ley de control $u(t)$ para para los vértices del sistema de dos masas. .	52
3.26	Posiciones $x(t)$ con un controlador de uno y dos parámetros para sistema de dos masas	53
3.27	Ley de control $u(t)$ con un controlador de uno y dos parámetros para sistema de dos masas	53

Lista de tablas

2.1	Modelos de incertidumbre y funciones a minimizar más comunes . . .	20
3.1	Valores de parámetros para RPR de 2DOF	35
3.2	Valores de parámetros libres para RPR de 2DOF	35
3.3	Parámetros del motor de DC	42
3.4	Parámetros de control de los controladores estabilizantes para diferentes puntos de operación.	45
3.5	Parámetros de control en cada vértice	46
3.6	Valores de parámetros a para los vértices del sistema de dos masas. .	50

Nomenclatura

Acrónimos

LPV	Lineal con Parámetros Variantes en el tiempo (Linear Parameter-Varying)
LTI	Lineal Invariante en el Tiempo (Linear Time-Invariant)
LMI	Desigualdad Lineal Matricial (Linear Matrix Inequality)
BRL	Lema de Cota Real (Bounded Real Lemma)
FCD	Factorización Coprima Derecha
FCI	Factorización Coprima Izquierda
QS	Estabilidad Cuadrática (Quadratic Stability)
DOF	Grado de Libertad (Degree of Freedom)
PTCE	Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes
CD	Corriente Directa
PRR	Robot Planar Rotacional (Planar Rotational Robot)

Símbolos

\mathbb{R}	Conjunto de números reales.
$\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$	Espacio que contiene todas las funciones cuadráticamente integrables.
\in	Pertenece a.
\subset	Contenido en.
\forall	Para todo(a).
\exists	Existe.
$:=$	Definido como.
$\max(x)$	Máximo de x .
$\min(x)$	Mínimo de x .
$\ x\ _p$	Norma p de $x \in \mathbb{R}$.
\mathbf{I}_p	Matriz identidad de dimensión $p \times p$
\mathbf{A}^T	Transpuesta de la matriz \mathbf{A} .
\mathbf{A}^{-1}	Inversa de la matriz \mathbf{A} .
\mathcal{RH}_∞	conjunto de funciones racionales en s , propias y estables.

Variables

r	Señal de referencia.
u	Señal de entrada de la planta.
y	Señal de salida de la planta.
d_i	Perturbaciones externas en la entrada de la planta.
d_o	Perturbaciones externas en la salida de la planta.
d_m	Perturbaciones externas en las mediciones de la planta.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

En aplicaciones reales el control diseñado para una planta no solo debe mantener estabilidad, sino también satisfacer algún criterio de desempeño incluso ante la presencia de incertidumbres y disturbios, tales como dinámicas no modeladas, no linealidades, incertidumbres paramétricas, variaciones de carga, vibraciones y envejecimiento.

La incertidumbre en un modelo surge debido a que ningún modelo es equivalente a un sistema real porque se han considerado simplificaciones de éste, para facilitar el análisis o diseño. La incertidumbre dinámica corresponde a dinámicas de la planta no modeladas, comúnmente en altas frecuencias debido a que un modelo es más preciso en bajas frecuencias, o a modelos simplificados como el hecho de linealizar en un punto de operación a un modelo no lineal. Por otra parte, la incertidumbre paramétrica surge como resultado de no conocer con exactitud el valor de los parámetros físicos o variaciones de éstos durante la operación del sistema o planta.

Cuando el modelo de la planta se puede tomar como Lineal Invariante en el Tiempo (LTI), la teoría de control robusto [1] ofrece herramientas de análisis y síntesis para dar al sistema en lazo cerrado estabilidad robusta; es decir, estabilidad en presencia de incertidumbre dinámica y también paramétrica, y desempeño robusto; es decir, desempeño ante disturbios.

La teoría de control robusto está basada en la minimización de relaciones entrada-salida; por lo que estas relaciones representan los criterios de estabilidad

y desempeño que se desean. En ocasiones, no es posible satisfacer varios criterios al mismo tiempo, por lo que se tienen técnicas como Conformación de Lazo (Loop Shaping) y sensibilidad mezclada ([2], [3]), que permite establecer compromisos entre criterios.

Cuando la planta está sujeta a incertidumbre, la teoría de control robusto lleva a leyes de control conservativas, deteriorando el desempeño cuando la planta se aleja de los valores nominales de los parámetros para los cuales el controlador fue diseñado.

En los sistemas Lineales con Parámetros Variantes en el Tiempo (LPV) ([4], [5], [6], [7]), se asume que se conocen las cotas de los parámetros y en este trabajo se asume que su valor se puede medir en tiempo real, por lo que estas mediciones se incorporan en la ley de control, siendo así, menos conservativa y por lo tanto mejorando el desempeño del sistema en lazo cerrado.

Debido a esto, el control LPV ha sido aplicado a tanques acoplados ([8]), robots flexibles ([9]), vehículos aéreos no tripulados ([10]), misiles ([11]), aeronaves ([12]), péndulos invertidos ([13]), sistemas de producción de energía ([14]), por citar algunos.

El análisis y síntesis para sistemas LPV está basado en las técnicas de Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs). Las LMIs surgen en problemas de control cuando se utilizan técnicas basadas en estabilidad de Lyapunov, además de que las restricciones de diseño se encuentran comúnmente expresadas en desigualdades. Las técnicas de LMIs representan un enfoque práctico ya que están disponibles algoritmos para resolver problemas de LMIs numéricamente ([15],[16]), que no tienen solución analítica.

A continuación se dan algunos resultados relacionados con el control de sistemas LPV y posteriormente se da el objetivo de este trabajo.

1.2. Estado del arte

En [4] se dan condiciones necesarias para garantizar estabilidad asintótica en una familia de sistemas lineales mediante la solución de un problema de factibilidad sujeto a un número finito de LMIs, donde los elementos de la matriz de estados, en su representación en espacio de estados, son funciones multiafín de un vector de parámetros desconocidos pero acotados, que pertenecen a un poliedro convexo.

En [17] se dan condiciones necesarias y suficientes para garantizar que un sistema con incertidumbre paramétrica variante en el tiempo de norma acotada,

en todas las matrices del sistema en su representación en espacio de estados, sea cuadráticamente estable, y también se da una cota de atenuación a disturbios por retroalimentación de salida, dado un controlador invariante en el tiempo.

En [5] se dan condiciones suficientes para la existencia de controladores \mathcal{H}_∞ con dependencia paramétrica lineal fraccional para plantas LPV en términos de LMIs, donde las matrices del sistema en su representación en espacio de estados son funciones lineales fraccionales de los parámetros que varían en el tiempo, así como una metodología para obtener el controlador. Un inconveniente es que se considera que los parámetros pueden ser complejos, siendo así conservativos, sabiendo que son reales.

En [18] se da una metodología para la síntesis de controladores LPV, que garantizan estabilidad y una cota para el desempeño, para sistemas LPV que pueden tomar una representación politópica, su metodología consiste en diseñar un controlador robusto \mathcal{H}_∞ en cada vértice del sistema en su representación politópica, satisfaciendo el Lema de Cota Real (BRL); el controlador resultante es politópico y se obtiene a partir de una interpolación de los controladores diseñados para cada vértice.

En [19] se da un algoritmo para el cálculo de las coordenadas politópicas del punto de operación de un sistema LPV utilizadas para definir una ley de control con dependencia paramétrica

En esta tesis se propone diseñar un controlador para sistemas LPV, basado en la interpolación de controladores robustos LTI para los vértices del sistema, propuesto en [18], del resultado de [4] se garantiza estabilidad resolviendo un número finito de LMIs correspondientes a los vértices, y una cota de atenuación a disturbios como criterio de desempeño propuesto en [17] basado en la noción de estabilidad con desempeño, como una extensión al Lema de Cota Real (BRL). La interpolación de los controladores robustos LTI se puede realizar utilizando el algoritmo presentado en [19].

1.3. Objetivo

El objetivo general es el diseño de un controlador por retroalimentación de salida para sistemas LPV que garantice estabilidad robusta y desempeño robusto.

El controlador para el sistema LPV resulta de la interpolación de controladores

robustos LTI para diferentes vértices de la planta a controlar, cuando ésta, puede ser llevada a una representación politópica. Los controladores robustos LTI están basados en la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE), donde el parámetro libre del controlador se utiliza para resolver un criterio de sensibilidad mezclada.

En este trabajo se estudia la siguiente hipótesis.

1.4. Hipótesis

Los sistemas LPV poseen propiedades de convexidad que se asume, permiten que el controlador LPV obtenido por interpolación de controladores robustos LTI basados en la PTCE, estabilice al sistema LPV, además de presentar un desempeño relacionado al de los controladores robustos LTI.

Para lograr el objetivo planteado, se propone la siguiente metodología.

1.5. Metodología

El procedimiento propuesto es el siguiente:

1. Obtener una representación politópica de un sistema LPV dado.
2. Diseñar un controlador estable y estabilizante basado en la PTCE ([20] y [21]) para cada vértice de este sistema LPV y fijar su parámetro libre resolviendo un problema de sensibilidad mezclada ([22], [21]).
3. Sintetizar un controlador para el sistema LPV por interpolación de los controladores estabilizantes diseñados para cada vértice.
4. Realizar análisis de Estabilidad Cuadrática (QS) del sistema LPV en lazo cerrado, garantizando convexidad y resolviendo un conjunto de LMIs aplicando el Teorema de los Vértices ([4]).
5. Analizar el desempeño del sistema LPV y su relación con el desempeño de los vértices.

A continuación se da la organización de la tesis.

1.6. Estructura de la Tesis

La tesis se encuentra dividida en 4 capítulos. En el capítulo 1 se presenta una introducción general, que aborda el tema de controladores robustos para sistemas LPV, posteriormente se mencionan algunos antecedentes relacionados, el objetivo principal del trabajo así como la hipótesis y metodología propuesta.

En el capítulo 2 se presentan resultados relacionados a sistemas LPV, así como al diseño de controladores robustos LTI que resuelven un criterio de sensibilidad mezclada.

En el capítulo 3 se presentan los resultados principales de este trabajo, donde se dan las condiciones para que una planta LPV sea QS por retroalimentación de salida con un controlador LPV sintetizado por interpolación de controladores LTI, así como una forma explícita del parámetro libre de la PTCE para los controladores LTI que resuelve un criterio de sensibilidad mezclada cuando se tiene un modelo de incertidumbre aditivo a la salida; también, la aplicación a un Robot Planar Rotacional (PRR) de dos Grados de Libertad (DOF), a un motor de Corriente Directa (CD) y a un sistema de dos masas.

Finalmente, en el capítulo 4 se dan las conclusiones generales de la tesis y posibles trabajos futuros.

Capítulo 2

Antecedentes

2.1. Introducción

En este capítulo se da una introducción de los sistemas Lineales con Parámetros Variantes en el Tiempo (LPV) ([4], [5], [6], [7]), y en particular una clase de ellos que son utilizados en esta tesis, así como su análisis de estabilidad basado en técnicas de Lyapunov y el Teorema de los vértices ([4]), y desempeño basado en el Lema de Cota Real (BRL) ([25]), que se pueden obtener resolviendo un conjunto finito de Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs) cuando el sistema se puede llevar a una representación politópica.

El número finito de LMI para el análisis de estabilidad y desempeño corresponde al número de vértices del sistema LPV en su representación politópica, donde se diseñan controladores Lineales Invariantes en el tiempo (LTI), por lo que también en particular, se da una solución para la síntesis de controladores robustos LTI basados en la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE), que resuelven un problema de sensibilidad mezclada ([22], [21]).

El diseño de estos controladores robustos para sintetizar, por interpolación, el controlador para el sistema LPV, así como el análisis de estabilidad y desempeño basado en LMIs, dados en este capítulo, serán utilizados en los resultados del Capítulo 3.

2.2. Sistemas LPV

Los sistemas LPV, son sistemas lineales cuya representación en variables de estado dependen de parámetros que varían en el tiempo; se considera que los parámetros no se conocen, pero pueden ser medidos o estimados bajo condiciones de operación del sistema; también, se asume que se conocen sus cotas y en ocasiones su velocidad de cambio, por lo que se puede ajustar la ley de control en función de los parámetros y como consecuencia mantener el desempeño para todas las trayectorias del sistema. En este trabajo, se considera que se conocen las cotas de los parámetros que varían en el tiempo y que su valor se puede medir en tiempo real.

El diseño de controladores robustos utilizando el Teorema de Pequeñas Ganancias, puede aplicarse a estos sistemas para obtener controladores LTI; sin embargo, este enfoque es demasiado conservativo cuando el rango de los parámetros es grande y sus variaciones son rápidas durante la operación del sistema.

Los sistemas LPV se pueden ver como sistemas LTI sujetos a incertidumbres paramétricas variantes en el tiempo, como resultado de la linealización de un sistema no lineal a lo largo de las trayectorias de uno o varios parámetros, o como la aproximación polinomial de un modelo no lineal.

Una clase de sistemas LPV se obtiene cuando las matrices en su representación en espacio de estados son funciones afín de los parámetros que varían con el tiempo, permitiendo llevar al sistema a una representación politópica.

A continuación, se presenta una consecuencia de esta representación para el análisis de sistemas LPV.

2.2.1. Estabilidad Cuadrática

La teoría de estabilidad cuadrática ([23], [24]) es una técnica efectiva contra incertidumbre paramétrica variante en el tiempo, garantizando estabilidad exponencial a un sistema LPV para todas las trayectorias admisibles de los parámetros que varían con el tiempo.

Considere un sistema LPV de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t), \quad t \in [0, +\infty) \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados y $p(t) \in H \subset \mathbb{R}^q$ es continua y diferenciable; además, el vector de parámetros variante en el tiempo pertenece a un politopo H ,

formado por la cotas de q parámetros variantes en el tiempo, que tiene la siguiente forma,

$$H := [\underline{p}_1, \overline{p}_1] \times [\underline{p}_2, \overline{p}_2] \times \cdots \times [\underline{p}_q, \overline{p}_q] \quad (2.2)$$

donde \underline{p} denota la cota inferior de $p(t)$ y \overline{p} la cota superior del mismo; las combinaciones de las cotas de los parámetros representan los 2^q vértices del politopo H . El vector de parámetros $p(t)$ se obtiene mediante una combinación lineal de los vértices del politopo, de la siguiente forma,

$$p(t) = \alpha_1 p_{(1)} + \cdots + \alpha_i p_{(i)}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 2^q, \quad \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i = 1 \quad (2.3)$$

donde $p_{(i)}$ representa los vértices del politopo H y α_i las coordenadas politópicas de éste mismo, con $i = 1, \dots, 2^q$.

Definición 2.1 *El sistema dado por la ecuación (2.1) es cuadráticamente estable (QS) en H si y sólo si existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva tal que $\forall p(t) \in H$,*

$$A^T(p(t))P + PA(p(t)) < 0 \quad (2.4)$$

Una condición difícil de satisfacer es el número infinito de desigualdades que se presentan en (2.4). En el caso especial de los sistemas LPV, esta condición se reduce a un número finito bajo la siguiente suposición,

Suposición 2.1 *La matriz $A(p(t))$ del sistema (2.1) puede representarse como la relación de una función matricial multiafín de $p(t)$ y un polinomio multiafín de $p(t)$, esto es,*

$$A(p(t)) = \frac{N_A(p(t))}{d_A(p(t))} = \frac{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_q=0}^1 A_{i_1, \dots, i_q} p_1^{i_1}(t) p_2^{i_2}(t) \dots p_q^{i_q}(t)}{\sum_{i_1, i_2, \dots, i_q=0}^1 a_{i_1, \dots, i_q} p_1^{i_1}(t) p_2^{i_2}(t) \dots p_q^{i_q}(t)} \quad (2.5)$$

donde, $d_A(p(t)) \neq 0 \quad \forall p(t) \in H$ y $N_A(p(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Bajo esta suposición, el sistema se lleva a una representación politópica, es decir, a una envolvente convexa de un número finito de vértices que corresponden a las imágenes de los vértices del politopo H ,

$$A(p(t)) \in \text{conv} \{A_{(i)} : i = 1, \dots, 2^q\} \quad (2.6)$$

La matriz $A(p(t))$ se puede obtener mediante una combinación lineal de la matriz $A(p(t))$ evaluada en los vértices,

$$A(p(t)) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i A(p_{(i)}), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i = 1, \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (2.7)$$

Bajo ésta suposición sobre dependencia multiafín en $p(t)$ y usando convexidad se llega al siguiente Teorema ([4]).

Teorema 2.1 *El sistema (2.1) bajo la suposición 2.1 es cuadráticamente estable (QS) si y sólo si existe una matriz positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que,*

$$A^T(p_{(i)})P + PA(p_{(i)}) < 0, \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (2.8)$$

donde, $p_{(i)}$ es el i -ésimo vértice de H .

Este resultado suele ser conservativo cuando la variación de los parámetros es lenta, ya que esta técnica permite variaciones de los parámetros arbitrariamente rápidas.

2.2.1.1. Estabilidad cuadrática por retroalimentación de salida

Considere el siguiente sistema LPV,

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B(p(t))u(t) \quad (2.9a)$$

$$y(t) = C(p(t))x(t) \quad (2.9b)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $p(t) \in H \subset \mathbb{R}^q$ y $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ son funciones matriciales continuas de dimensiones apropiadas.

Considere un controlador dinámico de la siguiente forma,

$$\dot{x}_k(t) = A_K(p(t))x_k(t) + B_K(p(t))y(t) \quad (2.10a)$$

$$u(t) = C_K(p(t))x_k(t) + D_K(p(t))y(t) \quad (2.10b)$$

donde $x_k(t) \in \mathbb{R}^n$ y $A_K(\cdot)$, $B_K(\cdot)$, $C_K(\cdot)$ y $D_K(\cdot)$ son funciones matriciales continuas.

De acuerdo a la Definición 2.4, el sistema (2.9) es cuadráticamente estabilizable por retroalimentación de salida por un controlador con dependencia paramétrica de la forma (2.10) si y sólo si existe una matriz definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ tal que $\forall p(t) \in H$

$$A_{CL}^T(p(t))P + PA_{CL}(p(t)) < 0 \quad (2.11)$$

donde,

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} A(p(t)) + B(p(t)) D_K(p(t)) C(p(t)) & B(p(t)) C_K(p(t)) \\ B_K(p(t)) C(p(t)) & A_K(p(t)) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Para poder aplicar el Teorema 2.1, la matriz $A_{CL}(p(t))$, debe satisfacer la Suposicion 2.1.

En [7], se muestra una metodología para obtener un controlador LPV que garantice QS por retroalimentación de salida considerando algunas matrices constantes para satisfacer la Suposición 2.1 y poder aplicar el Teorema 2.1 para la ecuación (2.11).

2.2.2. Desempeño

El desempeño \mathcal{L}_2 acotado por γ (ver [17]), significa que la norma-2 del mapeo entrada-salida de señales que pertenecen a $\mathcal{L}_2[0, \infty)$, es decir, al espacio de señales cuadráticamente integrables, está acotado por γ para todas las trayectorias admisibles de los parámetros que varían en el tiempo.

Esta noción de estabilidad cuadrática con desempeño \mathcal{L}_2 , es una extensión a sistemas LPV del Lema de Cota Real (BRL) que es válido para sistemas LTI.

Considere el siguiente sistema LTI,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t) \quad (2.13a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dw(t) \quad (2.13b)$$

Teorema 2.2 (Lema de Cota Real [25]) Dado $\gamma > 0$, los siguientes enunciados son equivalentes para el sistema (2.13)

1. A es estable y $\|D + C(sI - A)^{-1}B\|_\infty < \gamma$
2. Existe una matriz simétrica definida positiva tal que,

$$A^T P + PA + C^T C + (PB + C^T D)(\gamma^2 I - D^T D)^{-1}(B^T P + D^T C) < 0 \quad (2.14)$$

Considere el sistema LPV,

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B(p(t))w(t) \quad (2.15a)$$

$$y(t) = C(p(t))x(t) + D(p(t))w(t) \quad (2.15b)$$

Definición 2.2 Dado $\gamma > 0$, el sistema (2.15) es cuadráticamente estable con desempeño \mathcal{L}_2 acotado por γ si y sólo si existe una matriz P definida positiva tal que $\forall p(t) \in H$,

$$A^T(p(t))P + PA(p(t)) + C^T(p(t))C(p(t)) + (PB(p(t)) + C^T(p(t))D(p(t))) (\gamma^2 I - D^T(p(t))D(p(t)))^{-1} (B^T(p(t))P + D^T(p(t))C(p(t))) < 0 \quad (2.16)$$

La siguiente ecuación es equivalente a (2.16) en forma de LMI aplicando el complemento de Schur.

$$\begin{bmatrix} A^T(p(t))P + PA(p(t)) & PB(p(t)) & C^T(p(t)) \\ B^T(p(t))P & -\gamma^2 I & D^T(p(t)) \\ C(p(t)) & D(p(t)) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.17)$$

Suposición 2.2 Las matrices del sistema (2.15) se pueden escribir,

$$\begin{bmatrix} A(p(t)) & B(p(t)) \\ C(p(t)) & D(p(t)) \end{bmatrix} = \frac{N_S(p)}{d_S(p)} \quad (2.18)$$

donde $N_S(p)$ es una función matricial multiafín y $d_S(p)$ es una función multiafín diferente de cero, $\forall p(t) \in H$

Entonces, bajo la Suposición 2.2 el sistema (2.15) es cuadráticamente estable con desempeño \mathcal{L}_2 acotado por γ si y sólo si existe una matriz P definida positiva tal que,

$$\begin{bmatrix} A^T(p_{(i)})P + PA(p_{(i)}) & PB(p_{(i)}) & C^T(p_{(i)}) \\ B^T(p_{(i)})P & -\gamma^2 I & D^T(p_{(i)}) \\ C(p_{(i)}) & D(p_{(i)}) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (2.19)$$

Las matrices del sistema (2.15) satisfaciendo la Suposición 2.1 individualmente, no garantiza que se pueda aplicar la Definición 2.2 sólo a los vértices. Sin embargo, la Suposición 2.2 se puede satisfacer si la matriz $A(p(t))$ satisface la Suposición 2.1 y las matrices B , C y D son independientes de $p(t)$; o si, todas las matrices satisfacen la Suposición 2.1 con denominador igual a uno.

2.2.2.1. Desempeño por retroalimentación de salida

Considere el siguiente sistema LPV,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(p(t))x(t) + B_1(p(t))w(t) + B_2(p(t))u(t) \\ z(t) &= C_1(p(t))x(t) + D_{11}(p(t))w(t) + D_{12}(p(t))u(t) \\ y(t) &= C_2(p(t))x(t) + D_{21}(p(t))w(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas de control, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entradas exógenas, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas medibles, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ es el vector de salidas que se desean controlar, y $p(t)$ es el vector de parámetros que varía con el tiempo. Se desea minimizar el efecto de las entradas w sobre las salidas z ;

Entonces, de acuerdo a la Definición 2.2 el sistema (2.20) es cuadráticamente estable con desempeño \mathcal{L}_2 acotado por γ por retroalimentación de salida con un controlador de la forma (2.10), si y sólo si existe una matriz definida positiva P tal que

$$\begin{bmatrix} A_{CL}^T(p(t))P + PA_{CL}(p(t)) & PB_{CL}(p(t)) & C_{CL}^T(p(t)) \\ B_{CL}^T(p(t))P & -\gamma^2 I & D_{CL}^T(p(t)) \\ C_{CL}(p(t)) & D_{CL}(p(t)) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (2.21)$$

donde,

$$A_{CL} = \begin{bmatrix} A(p(t)) + B_2(p(t))D_K(p(t))C_2(p(t)) & B_2(p(t))C_K(p(t)) \\ B_K(p(t))C_2(p(t)) & A_K(p(t)) \end{bmatrix} \quad (2.22a)$$

$$B_{CL} = \begin{bmatrix} B_1(p(t)) + B_2(p(t))D_K(p(t))D_{21}(p(t)) \\ B_K(p(t))D_{21}(p(t)) \end{bmatrix} \quad (2.22b)$$

$$C_{CL} = \begin{bmatrix} C_1(p(t)) + D_{12}(p(t))D_K(p(t))C_2(p(t)) & D_{12}(p(t))C_K(p(t)) \end{bmatrix} \quad (2.22c)$$

$$D_{CL} = D_{11}(p(t)) + D_{12}(p(t))D_K(p(t))D_{21}(p(t)) \quad (2.22d)$$

En [7], se muestra una metodología para obtener un controlador LPV que garantice QS con desempeño \mathcal{L}_2 acotado por γ por retroalimentación de salida considerando algunas matrices constantes.

Al poder garantizar estabilidad y desempeño para una planta basado en los vértices, permite que se realicen diseños de controladores para esos vértices que cumplan esos objetivos y mediante un algoritmo de interpolación de estos controladores, como el que se da en la siguiente sección o el propuesto en el Capítulo 3, obtener un controlador que se ajusta a las condiciones actuales de la planta.

2.2.3. Algoritmo de interpolación

El controlador del sistema LPV se sintetiza mediante la interpolación de los controladores LTI diseñados para cada vértice del sistema. En esta tesis, se considera la siguiente interpolación presentada en [6],

$$\begin{bmatrix} A_K(p(t)) & B_K(p(t)) \\ C_K(p(t)) & D_K(p(t)) \end{bmatrix} := \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p(t)) \begin{bmatrix} A_{K(i)} & B_{K(i)} \\ C_{K(i)} & D_{K(i)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

donde $\alpha_i(p(t))$ son las coordenadas politópicas utilizadas en (2.3), para obtener el vector de parámetros, permitiendo que el controlador tenga la misma dependencia paramétrica de la planta.

Todas las matrices del controlador se interpolan, llevándolo a una representación politópica.

2.2.4. Cálculo de coordenadas politópicas

El siguiente algoritmo describe un procedimiento para el cálculo de coordenadas politópicas (ver [26]), que es, una versión ligeramente mejorada del algoritmo presentado en [19],

- Defina Γ como una medida de H en el espacio de parámetros,

$$\Gamma := \prod_{i=1}^q \Delta_i \quad (2.24)$$

donde $\Delta_i = \bar{p}_i - \underline{p}_i > 0, \quad \forall i = 1, \dots, q.$

- Defina las siguientes funciones temporales,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_i(p(t)) &:= \bar{p}_i - p_i(t) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, q \in \mathbb{R}^+ \\ \underline{\Delta}_i(p(t)) &:= p_i - \underline{p}_i(t) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, q \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

- Entonces, las coordenadas politópicas se definen de la siguiente forma,

$$\begin{aligned}
\alpha_1(p(t)) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(p(t)) \overline{\Delta}_{q-1}(p(t)) \dots \overline{\Delta}_2(p(t)) \overline{\Delta}_1(p(t))}{\Gamma} \\
\alpha_2(p(t)) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(p(t)) \overline{\Delta}_{q-1}(p(t)) \dots \overline{\Delta}_2(p(t)) \underline{\Delta}_1(p(t))}{\Gamma} \\
\alpha_3(p(t)) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(p(t)) \overline{\Delta}_{q-1}(p(t)) \dots \underline{\Delta}_2(p(t)) \overline{\Delta}_1(p(t))}{\Gamma} \\
\alpha_4(p(t)) &:= \frac{\overline{\Delta}_q(p(t)) \overline{\Delta}_{q-1}(p(t)) \dots \underline{\Delta}_2(p(t)) \underline{\Delta}_1(p(t))}{\Gamma} \\
&\vdots \\
\alpha_{2^q-1}(p(t)) &:= \frac{\underline{\Delta}_q(p(t)) \underline{\Delta}_{q-1}(p(t)) \dots \underline{\Delta}_2(p(t)) \overline{\Delta}_1(p(t))}{\Gamma} \\
\alpha_{2^q}(p(t)) &:= \frac{\underline{\Delta}_q(p(t)) \underline{\Delta}_{q-1}(p(t)) \dots \underline{\Delta}_2(p(t)) \underline{\Delta}_1(p(t))}{\Gamma} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

En la siguiente sección se presentan formulas explícitas para controladores LTI que estabilizan a una planta dada; estos controladores, son diseñados para los vértices del sistema LPV en su representación politópica y utilizados para la interpolación del controlador LPV y para el análisis de estabilidad y desempeño del sistema en lazo cerrado, presentados en esta sección.

2.3. Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes

La Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE), es una fórmula que describe todos los posibles controladores que estabilizan a una planta dada por retroalimentación. Esta parametrización, está en función de un parámetro libre. La PTCE fue inicialmente propuesta por [27] y [28], y desarrollada para funciones racionales por [29] y [20] y su relevancia es que este parámetro libre se puede ajustar de tal manera que se cumplan criterios adicionales.

La PTCE en la configuración retroalimentada de un parámetro, es mostrada en la Figura 2.1, donde $P(s)$ es la planta y $K(s)$ es el controlador que está dado por,

$$K(s) = \tilde{D}_K^{-1}(s) \tilde{N}_K(s) = (Y(s) - R_1(s) \tilde{N}(s))^{-1} (X(s) + R_1(s) \tilde{D}_P(s)) \quad (2.26)$$

$$\tilde{K}(s) = N_K(s) D_K^{-1} = (\tilde{X}(s) + D_P(s) R_2(s)) (\tilde{Y}(s) - N(s) R_2(s))^{-1} \quad (2.27)$$

donde, $R_1(s), R_2(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ son los parámetros libres del controlador, $N_P(s), D_P(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ provienen de la Factorización Coprima Derecha (FCD) de la planta,

$$P(s) = N_P(s)D_P^{-1}(s) \quad (2.28)$$

$\tilde{N}_P(s), \tilde{D}_P(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ provienen de la Factorización Coprima Izquierda (FCD) de la planta,

$$P(s) = \tilde{D}_P^{-1}(s)\tilde{N}_P(s) \quad (2.29)$$

y, $X(s), Y(s), \tilde{X}(s)$ y $\tilde{Y}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ son las soluciones de las ecuaciones Diofánticas,

$$X(s)N_P(s) + Y(s)D_P(s) = I \quad (2.30)$$

$$\tilde{N}_P(s)\tilde{X}(s) + \tilde{D}_P(s)\tilde{Y}(s) = I \quad (2.31)$$

Para la configuración retroalimentada de dos parámetros mostrada en la Figura 2.2, el controlador es,

$$\begin{bmatrix} K_r(s) & K(s) \end{bmatrix} = \tilde{D}_K^{-1}(s) \begin{bmatrix} Q(s) & \tilde{N}_K(s) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

donde $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ es un parámetro libre del controlador $K_r(s)$.

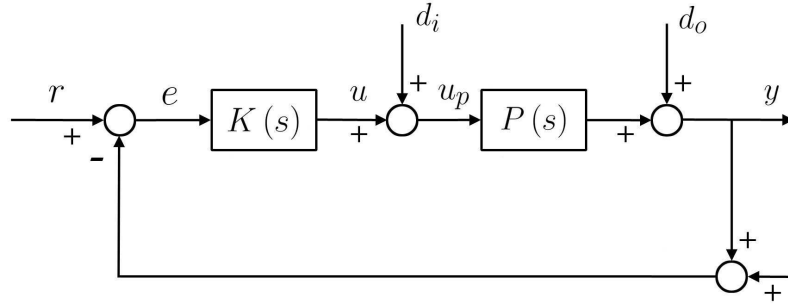


Figura 2.1: Configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$ de un parámetro.

En la configuración mostrada en la Figura 2.1, el controlador $K(s)$ cumple la función de dar estabilidad y desempeño, mientras que en la Figura 2.2, $K_r(s)$ es comúnmente utilizado para dar desempeño, dejando a $K(s)$ para la estabilidad del sistema.

Los trabajos de [30], [22] y [21] resuelven la FCD y la FCI de la planta, y dan solución a la ecuación Diofántica en el dominio de la frecuencia, a partir de una representación en espacio de estados de la planta. No se requieren operaciones

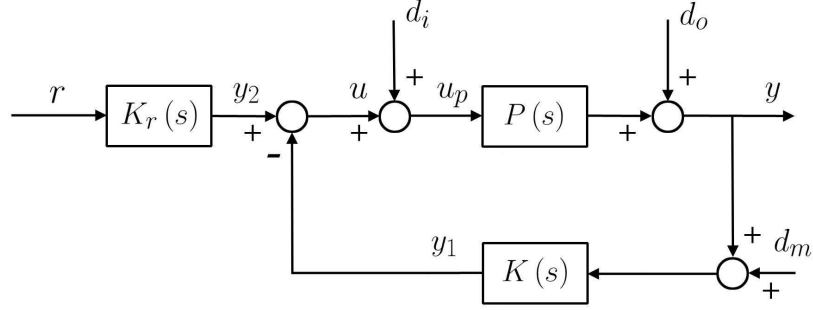


Figura 2.2: Configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$ de dos parámetros.

elementales ni retroalimentación estática del estado, y las soluciones están en términos de la realización de la planta.

Estos trabajos consideran la siguiente clase de sistemas, sea el sistema LTI,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.33a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.33b)$$

donde A y B están particionadas de la siguiente forma,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

siendo m la dimensión de $u(t)$, n la dimensión de $x(t)$ y p la dimensión de $y(t)$. Se asume que el sistema es cuadrado, $A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$, y que A_{12}, A_{21} y B_m son no singulares, que el sistema es estabilizable y detectable, para permitir la estabilización de la planta por retroalimentación de salida, y se satisface $n = 2m$ y $p = m$, es decir, la dimensión del estado es par, la dimensión de la entrada es la mitad de la dimensión del estado y la dimensión de la salida es igual a la dimensión de la entrada; cabe señalar que los modelos Euler-Lagrange linealizados con un actuador por cada grado de libertad, toman esta representación.

Cuando se tiene información completa del estado, es decir $C = I$, se cuenta con la FCD y FCI de la planta y una solución de la ecuación Diofántica correspondiente a la FCI de la planta; mientras que en [31], basado en el Principio de separación, se obtiene un observador por dualidad, por lo que la matriz $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ del sistema puede tomar la representación, $C = [C_{11} \ C_{12}]$, donde C_{11} o C_{12} son no singulares.

Otra representación que puede tomar la matriz C , se encuentra en el trabajo presentado en [21], que es útil cuando se tiene únicamente la medición de algunos

estados, ésta es,

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \end{bmatrix} \quad o \quad C = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

donde C_{12} y $C_{12} \in R^{m \times m}$, son no singulares.

Las fórmulas explícitas de la FCD y FCI de la planta obtenidas en [21] son las siguientes,

$$N_P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} C_{11} A_{12} \quad (2.36)$$

$$D_P(s) = B_m^{-1} \Gamma(s) \quad (2.37)$$

$$\tilde{N}_P(s) = \frac{1}{(s+a)^2} B_m \quad (2.38)$$

$$\tilde{D}_P(s) = \Gamma(s)^{-1} A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \quad (2.39)$$

Una solución de la ecuación Diofántica (2.30) es,

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)} (X_1 s + A_{21} A_{12} Y_0 + a^3 I_m) A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \quad (2.40)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+a)} (s I_m + Y_0) \quad (2.41)$$

mientras que una solución de la ecuación Diofántica (2.31) es,

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{(s+a)} B_m^{-1} (X_1 s + A_{21} A_{12} Y_0 + a^3 I_m) \quad (2.42)$$

$$\tilde{Y}(s) = \frac{1}{(s+a)} C_{11} A_{12} (s I_m + Y_0) \quad (2.43)$$

donde,

$$\Gamma(s) = \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - s A_{22} - A_{21} A_{12}) \quad (2.44)$$

$$X_1 = Y_0 A_{22} + A_{21} A_{12} + 3a^3 I_m \quad (2.45)$$

$$Y_0 = A_{22} + 3a I_m \quad (2.46)$$

El parámetro libre a proviene de una transformación bilineal utilizada para la obtención de las Factorizaciones Coprimas de la planta en s y que pertenezcan a \mathcal{RH}_∞ ; debido a que a representa el límite de la región del semiplano izquierdo de s , tiene influencia en la respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado.

En esta tesis se considera el diseño de un controlador LPV por retroalimentación de salida, por lo que se utilizan los resultados de [21], tomando el primer caso de la ecuación (2.35), y en particular $C_{11} = I_m$, es decir, que se

tienen disponibles la primer mitad de los estados para retroalimentar; además, de tener las soluciones explícitas de las Factorizaciones Coprimas y las soluciones de las ecuaciones Diofánticas, que son utilizadas en la Sección 3.4 para dar solución a un problema de sensibilidad mezclada.

En la siguiente sección, se presentan fórmulas explícitas del parámetro libre de un controlador LTI, basado en la PTCE presentada en esta sección, que resuelven un problema de sensibilidad mezclada; este criterio de desempeño es utilizado para los vértices del sistema LPV.

2.4. Control Robusto y Sensibilidad Mezclada

Una forma para describir especificaciones de desempeño, es usar la medida de un sistema o de señales de interés. Estas medidas pueden ser definidas matemáticamente usando normas.

Para un sistema $G : \mathcal{L}_2 \mapsto \mathcal{L}_2$, es decir, que realiza un mapeo entre señales cuadráticamente integrables ($\|(\cdot)\|_2 < \infty$), se tiene que la norma inducida (ver [1]) es,

$$\|G\|_2 = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} \quad (2.47)$$

De acuerdo al Lema de Parseval (ver [29]), para sistemas LTI, la norma inducida corresponde a la norma- \mathcal{H}_∞ de la función de transferencia del sistema; definida como el valor singular máximo de la respuesta en frecuencia,

$$\|G(s)\|_\infty := \sup_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(jw)) \quad (2.48)$$

Las técnicas de control robusto se basan en la minimización de esta norma de funciones que relacionan entradas y salidas como especificaciones de desempeño ya que nos da una medida de que tan grande es la norma-2 de la salida deseada respecto a la de entrada.

Las funciones a ser minimizadas son las relacionadas a entradas exógenas como lo son $r(t)$, $d_i(t)$, $d_o(t)$ y $d_m(t)$ mostradas en las Fig. 2.1 y 2.2, que pueden representar señales no deseadas, para así lograr algún desempeño en la salida ante esa entrada, es decir, lograr un desempeño robusto.

Las siguientes ecuaciones representan las relaciones que existen entre las entradas exógenas y algunas salidas de interés para la configuración retroalimentada mostrada en la Figura 2.1,

$$y(s) = T_o(s)(r(s) - d_m(s)) + S_o(s)P(s)d_i(s) + S_o(s)d_o(s) \quad (2.49)$$

$$r(s) - y(s) = S_o(s)(r(s) - d_o(s)) + T_o(s)d_m(s) - S_o(s)P(s)d_i(s) \quad (2.50)$$

$$u(s) = K(s)S_o(s)(r(s) - d_m(s) - d_o(s)) - T_i(s)d_i(s) \quad (2.51)$$

$$u_p(s) = K(s)S_o(s)(r(s) - d_m(s) - d_o(s)) + S_i(s)d_i(s) \quad (2.52)$$

donde,

$$S_i(s) = (I + K(s)P(s))^{-1} \quad (2.53)$$

$$S_o(s) = (I + P(s)K(s))^{-1} \quad (2.54)$$

Las funciones $S_i(s)$ y $S_o(s)$ son llamadas funciones de sensibilidad a la entrada y a la salida respectivamente, mientras que $T_i(s)$ y $T_o(s)$ son llamadas funciones de sensibilidad complementarias a la entrada y a la salida respectivamente, debido a que $T_i(s) = I - S_i(s)$ y $T_o(s) = I - S_o(s)$.

Para la configuración retroalimentada mostrada en la Figura 2.2, se tienen las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} y(s) &= S_o(s)P(s)K_r(s)r(s) - T_o(s)d_m(s) \\ &+ S_o(s)P(s)d_i(s) + S_o(s)d_o(s) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$u(s) = -K(s)S_o(s)(d_m(s) + d_o(s)) + S_i(s)K_r(s)r(s) - T_i(s)d_i(s) \quad (2.56)$$

$$u_p(s) = -K(s)S_o(s)(d_m(s) + d_o(s)) + S_i(s)K_r(s)r(s) + S_i(s)d_i(s) \quad (2.57)$$

Además los modelos matemáticos no representan exáctamente al sistema físico real, esto es, se tiene incertidumbre en el modelo, más aún si se han considerado simplificaciones de éste, para facilitar algún análisis o diseño.

Existen varias formas de caracterizar la incertidumbre, si el modelo fue construido por observaciones entrada-salida es conveniente pensar en la incertidumbre como un cambio en el modelo dependiente de la frecuencia; un modelo basado en leyes físicas puede llevar a incertidumbre expresada en el rango de valores de los parámetros.

En la Figura 2.3, Δ representa la incertidumbre del modelo de la Planta y $M(s)$ es la función de transferencia de la entrada a la salida de la incertidumbre. Para las configuraciones retroalimentadas de (2.1) y (2.2), de $r(s)$ a $y(s)$ y de $y_2(s)$ a $y(s)$ respectivamente, $M(s)$ representa alguna de las funciones más comunes presentadas en la Tabla 2.1 de acuerdo a un modelo de incertidumbre.

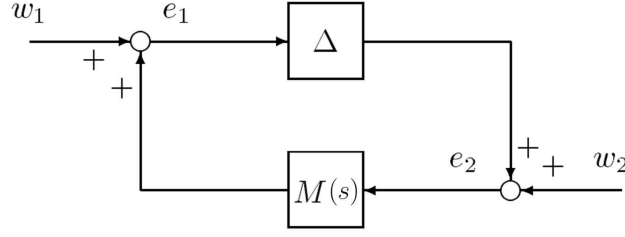


Figura 2.3: Teorema de pequeñas ganancias.

Un margen de estabilidad robusta ante incertidumbre se obtiene a través de la siguiente relación establecida por el Teorema de Pequeñas Ganancias ([32]).

Considere el sistema interconectado mostrado en la Figura 2.3, con $M(s)$ una matriz de transferencia estable.

Teorema 2.3 (Small Gain Theorem) *Suponga que $M(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Entonces el sistema interconectado mostrado en la Figura 2.3 está bien definido y es internamente estable $\forall \Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ con,*

- $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ si y sólo si $\|M(s)\|_\infty < \gamma$
- $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma}$ si y sólo si $\|M(s)\|_\infty \leq \gamma$

	Modelo de incertidumbre	Función $M(s)$
Modelo Multiplicativo a la entrada	$P(s)(I + \Delta(s))$	$T_i(s)$
Modelo Multiplicativo a la salida	$(I + \Delta(s))P(s)$	$T_o(s)$
Modelo Aditivo	$P(s) + \Delta(s)$	$K(s)S_o(s)$

Tabla 2.1: Modelos de incertidumbre y funciones a minimizar más comunes

En las especificaciones de diseño se considera minimizar diferentes funciones, sin embargo, es necesario establecer compromisos de minimización ya que no es posible minimizar todas al mismo tiempo debido a las relaciones que existen entre ellas, como por ejemplo las funciones complementarias $S_i(s)$ y $T_i(s)$ o $S_o(s)$ y $T_o(s)$. La técnica de sensibilidad mezclada permite satisfacer ese compromiso mediante la minimización simultánea de las funciones en diferentes bandas de frecuencias deseadas.

El criterio a minimizar,

$$J_1 := \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + PK)^{-1} \tilde{D}_P^{-1} \right\|_\infty \quad (2.58)$$

propuesto por [3] consiste en la minimización de las 4 funciones comúnmente utilizadas, mediante el uso de factorizaciones coprimas normalizadas.

El criterio,

$$J_2 := \left\| \begin{bmatrix} W_1(s)S_o(s) \\ W_2(s)M(s) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.59)$$

fue propuesto por [1], y consiste en minimizar los efectos de una perturbación aditiva a la salida $d_o(t)$ sobre $y(t)$, cuando se tiene un modelo de incertidumbre multiplicativo a la salida, las funciones de peso $W_1(s)$ y $W_2(s)$ representan la banda de frecuencias deseada para cada función, comúnmente para $d_o(t)$ en bajas frecuencias y para un modelo de incertidumbre en altas frecuencias.

El criterio (2.59) es transformado en [30], e involucra minimizar simultáneamente $\|S_{ol}\|_{\infty}$ y $\|M_h\|_{\infty}$ sujeto a $\|S_{ol}\|_{\infty} = \|M_h\|_{\infty}$, esto es,

$$J_3 := \left\| \begin{bmatrix} S_{ol} \\ M_h \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.60)$$

donde $S_{ol} = \lim_{s \rightarrow 0} S_o(s)$, y $M_h = \lim_{s \rightarrow \infty} M(s)$.

Algunas de las ventajas que se tienen con el criterio (2.60) es que no requiere operaciones elementales como en [27], [29], y [20], ni requiere estabilización previa como en [33], por lo que se tienen menos parámetros de control disminuyendo así el esfuerzo computacional. Además, el sistema no es aumentado con funciones de peso implicando que el orden del controlador no es mayor que el de la planta.

Un criterio en particular de (2.60) es el siguiente,

$$J_4 := \left\| \begin{bmatrix} S_{ol} \\ T_{oh} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (2.61)$$

donde, se considera el sistema (2.33), con las matrices A y B particionadas como en (2.34) y la matriz C como en (2.35); para la configuración retroalimentada de la Figura 2.1, utilizando la FCD, FCI de la planta y las soluciones de las ecuaciones Diofánticas dadas de la ecuación (2.36) a la ecuación (2.46), las aproximaciones resultan ([21]),

$$\|T_{oh}\|_{\infty} = \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_1 + a(rI_m + A_{22}))A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_{\infty} \quad (2.62)$$

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = \frac{|3a - r|}{a^3} \|C_{11}A_{12}A_{12}C_{11}^{-1}\|_{\infty} \quad (2.63)$$

donde $w_h > 0$ es una frecuencia fija en la banda de altas frecuencias de $P(s)$ y el parámetro libre del controlador $R_1(s)$ tiene la siguiente expresión,

$$R_1(s) = a(rI_m + A_{22}) \quad (2.64)$$

siendo r ,

$$r = \frac{a(3\|C_{11}A_{12}A_{12}C_{11}^{-1}\|_{\infty} - a^2b)}{a^3c + \|C_{11}A_{12}A_{12}C_{11}^{-1}\|_{\infty}} \quad (2.65)$$

donde,

$$b := \frac{1}{w_h^2} \|C_{11}A_{12}(X_1 + aA_{22})A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_{\infty} \quad (2.66)$$

$$c := \frac{1}{3aw_h^2} (\|C_{11}A_{12}(X_1 + aY_0)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_{\infty} - w_h^2b) \quad (2.67)$$

Además, para la configuración retroalimentada de la Figura 2.2, la expresión explícita para el parámetro libre $Q(s)$ es,

$$Q(s) = qa^2A_{12}^{-1}C_{11}^{-1} \quad (2.68)$$

donde,

$$q = \frac{w_h^2}{a^2 + w_h^2} \quad (2.69)$$

A continuación, se dan las conclusiones de este capítulo.

2.5. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los sistemas LPV, la técnica de QS que garantiza estabilidad y un desempeño en particular, reduciéndose a un número finito de LMIs, bajo la suposición de que las matrices del sistema LPV se pueden escribir como una función multiafín racional, que corresponden a los vértices de una planta LPV dada. En particular, en el capítulo siguiente se diseñan controladores robustos en cada vértice y se garantiza la convexidad del sistema en lazo cerrado. También se presentó una técnica de diseño de los controladores robustos para sistemas LTI que se basan en la PTCE y proporcionan un desempeño al seleccionar su parámetro libre, minimizando un criterio de sensibilidad mezclada.

En el capítulo siguiente se estudia también la relación entre el desempeño del controlador robusto en cada vértice y el desempeño del controlador LPV.

Capítulo 3

Estabilidad cuadrática y desempeño \mathcal{L}_2 en lazo cerrado

3.1. Introducción

En éste capítulo se presentan los resultados basados en asegurar estabilidad cuadrática (QS) de un sistema Lineal con Parámetros Variantes en el Tiempo (LPV) con representación politópica (ver sección 2.2) en lazo cerrado cuando se aplica un controlador LPV propuesto, en las configuraciones retroalimentadas de uno y dos parámetros. El controlador LPV es sintetizado por interpolación de controladores LTI diseñados para los vértices de una planta LPV dada utilizando el algoritmo de la sección 2.2.3. Se realiza un análisis del desempeño mostrado por los controladores LTI diseñados en cada vértice y se compara con el controlador LPV.

El diseño del controlador para cada vértice está basado en controladores robustos y que a su vez están basados en la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes, que satisfacen un criterio de sensibilidad mezclada al ajustar su parámetro libre (ver sección 2.3). En este capítulo se da una forma explícita del parámetro libre cuando se tiene un modelo de incertidumbre aditivo a la salida.

3.2. Estabilidad cuadrática

En esta sección, se presentan las consideraciones que la planta y el controlador deben presentar, para que el sistema en lazo cerrado por retroalimentación de salida,

se pueda representar en forma politópica y poder aplicar los resultados de análisis de estabilidad presentados en la sección 2.2.1, solucionando un número finito de LMIs.

Considere el siguiente sistema LPV,

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + Bu(t) \quad (3.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.1b)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ y $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $p(t) \in H \subset \mathbb{R}^q$; $A(\cdot)$ es una función matricial continua con dependencia paramétrica que satisface la Suposición 2.1, y H es el politopo definido por (2.2); entonces, el sistema (3.1) puede tomar una representación politópica con i -vértices.

En esta tesis, se considera que las matrices B y C del sistema (3.1) son constantes. Esta consideración se puede obtener con modelos Hamiltonianos linealizados que presentan la matriz B constante como se muestra en el ejemplo de la sección 3.6, también, se puede hacer B constante por un cambio de variable como en ejemplo que se muestra en la sección 3.7 o utilizando filtros en las entradas de control u y en las salidas de medición y como se menciona en [6]. La matriz C constante, se obtiene si se tiene disponible la medición de algunos estados como se considera en esta tesis presentado en la sección 2.3.

Considere un controlador LPV diseñado para la configuración mostrada en la Figura (3.1), con la siguiente representación en espacio de estados,

$$\dot{x}_k(t) = A_K(p(t))x_k(t) + B_K(p(t))e(t) \quad (3.2a)$$

$$u(t) = C_K(p(t))x_k(t) + D_K(p(t))e(t) \quad (3.2b)$$

y un controlador LPV diseñado para la configuración mostrada en la Figura 3.2, con la siguiente representación en espacio de estados,

$$\dot{x}_k(t) = A_K(p(t))x_k(t) + B_K(p(t))y(t) \quad (3.3a)$$

$$y_1(t) = C_K(p(t))x_k(t) + D_K(p(t))y(t) \quad (3.3b)$$

$$\dot{x}_{kr}(t) = A_{Kr}(p(t))x_{kr}(t) + B_{Kr}(p(t))r(t) \quad (3.4a)$$

$$y_2(t) = C_{Kr}(p(t))x_{kr}(t) + D_{Kr}(p(t))r(t) \quad (3.4b)$$

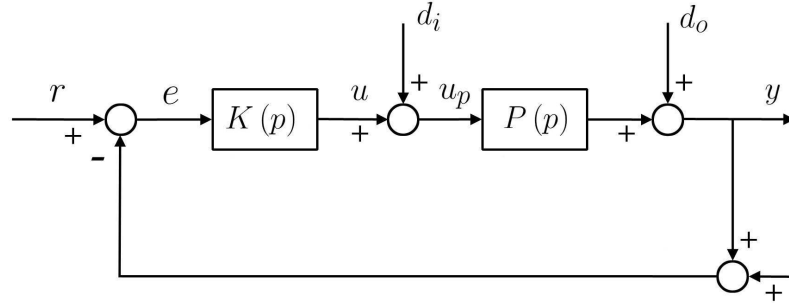


Figura 3.1: Configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de un parámetro.

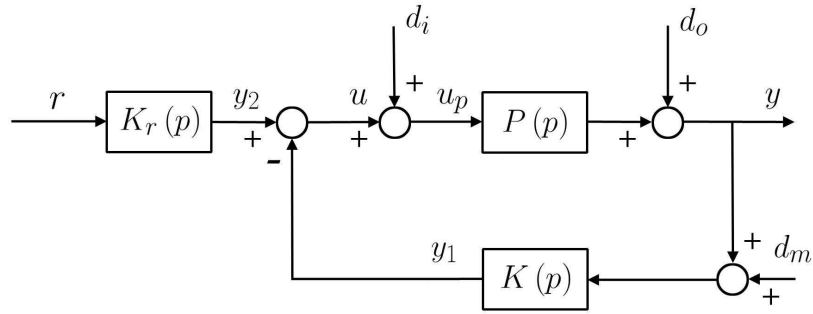


Figura 3.2: Configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de dos parámetros.

Entonces el sistema en lazo cerrado en la configuración retroalimentada de un parámetro de la Figura 3.1 resulta en,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_k(t) \end{bmatrix} = A_{CL1}(p(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BD_k(p(t)) \\ B_k(p(t)) \end{bmatrix} r(t) \quad (3.5a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix} \quad (3.5b)$$

donde,

$$A_{CL1}(p(t)) = \begin{bmatrix} A(p(t)) - BD_K(p(t))C & BC_K(p(t)) \\ -B_K(p(t))C & A_K(p(t)) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y el sistema en lazo cerrado en la configuración de controlador de dos parámetros

de la Figura 3.2 resulta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_k(t) \\ \dot{x}_{kr}(t) \end{bmatrix} = A_{CL2}(p(t)) \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \\ x_{kr}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BD_{Kr}(p(t)) \\ 0 \\ B_{Kr}(p(t)) \end{bmatrix} \quad (3.7a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \\ x_{kr}(t) \end{bmatrix} \quad (3.7b)$$

donde,

$$A_{CL2}(p(t)) = \begin{bmatrix} A(p(t)) - BD_K(p(t))C & -BC_K(p(t)) & BC_{Kr}(p(t)) \\ B_K(p(t))C & A_K(p(t)) & 0 \\ 0 & 0 & A_{Kr}(p(t)) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

A continuación se presenta el resultado principal sobre estabilidad cuadrática, basado en la LMI 2.11.

Lema 3.1 *Los sistemas en lazo cerrado de las Figuras 3.1 y 3.2, donde el sistema LPV esta dado por (3.1), son cuadráticamente estables $\forall p(t)$ admisible si existe una matriz P definida positiva tal que,*

$$PA_{CL}(p_{(i)}) + A_{CL}^T(p_{(i)})P < 0 \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (3.9)$$

donde $A_{CL}(p(t))$ es $A_{CL1}(p(t))$ o $A_{CL2}(p(t))$.

Este resultado, es una aplicación directa del Teorema 2.1 a las configuracions de las Figuras 3.1 y 3.2, considerando la representación de la planta y controlador usados en esta tesis.

En la matriz de estados del sistema en lazo cerrado A_{CL} , formada por matrices de la planta y el controlador, no se presentan productos de matrices que provengan con dependencia paramétrica debido a los términos constantes de las matrices B y C de la planta que son multiplicados por matrices del controlador con dependencia paramétrica, satisfaciendo así la Suposición 2.1, para poder llevar al sistema en lazo cerrado a un representación politópica y aplicar el Teorema 2.1.

La representación de los controladores dados de (3.2) a (3.4), que tienen dependencia en todas las matrices, puede provenir de la interpolación presentada en la sección 2.2.3 para $K(p(t))$ de las Figuras 3.1 y 3.2; de igual forma, el controlador

$K_r(p(t))$ para la configuración retroalimentada mostrada en la Figura 3.2 está dado por,

$$\begin{bmatrix} A_{K_r}(p(t)) & B_{K_r}(p(t)) \\ C_{K_r}(p(t)) & D_{K_r}(p(t)) \end{bmatrix} := \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p(t)) \begin{bmatrix} A_{K_r(i)} & B_{K_r(i)} \\ C_{K_r(i)} & D_{K_r(i)} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

De esta forma, el controlador LPV toma el mismo orden del sistema, utilizando el diseño de los controladores LTI presentado en las secciones 2.3 y 2.4.

Otra representación del controlador LPV, que también es usada en esta tesis, se obtiene mediante la siguiente interpolación para $K(p(t))$ de las Figuras 3.1 y 3.2

$$K(p(t)) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p(t)) K_{(i)} \quad (3.11)$$

donde $K_{(i)}$ es la relación entrada-salida de $K_{(i)}(s)$, es decir,

$$\dot{x}_k(t) = A_K x_k(t) + B_K(p(t)) e(t) \quad (3.12a)$$

$$u(t) = C_K x_k(t) + D_K(p(t)) e(t) \quad (3.12b)$$

De igual forma, el controlador $K_r(p(t))$ para la configuración retroalimentada mostrada en la Figura 3.2 está dado por,

$$K_r(p(t)) = \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(p(t)) K_{r(i)} \quad (3.13)$$

y el controlador interpolado toma la siguiente representación,

$$\dot{x}_k(t) = A_K x_k(t) + B_K(p(t)) y(t) \quad (3.14a)$$

$$y_1(t) = C_K x_k(t) + D_K(p(t)) y(t) \quad (3.14b)$$

$$\dot{x}_{kr}(t) = A_{K_r} x_{kr}(t) + B_{K_r}(p(t)) r(t) \quad (3.15a)$$

$$y_2(t) = C_{K_r} x_{kr}(t) + D_{K_r}(p(t)) r(t) \quad (3.15b)$$

En este caso, el controlador LPV toma a lo más, i -veces el orden de la planta, donde i denota el número de vértices. La no dependencia paramétrica en las matrices A y C de los controladores LPV, se debe a que K_i y K_{ri} , representan la relación entrada-salida de $K_i(s)$ y $K_{ri}(s)$ respectivamente; además, representa un caso particular del Lema 3.1, que no afectan en el criterio de estabilidad.

A continuación, se da una cota superior γ de la relación entrada $r(t)$ a la salida $y(t)$, para las Figuras 3.1 y 3.2, para todas las trayectorias de los parámetros admisibles.

3.3. Desempeño \mathcal{L}_2 en lazo cerrado

El desempeño \mathcal{L}_2 acotado por γ para todas las trayectorias de los parámetros admisibles, utilizando la representación en espacio de estados de los sistemas en lazo cerrado dados en (3.5) y (3.7) para las Figuras 3.1 y 3.2 respectivamente, de la relación de la entrada $r(t)$ a la salida $y(t)$ es,

$$\|y\|_2 < \gamma \|r\|_2 \quad (3.16)$$

Utilizando la Definición 2.2, γ se obtiene resolviendo la siguiente LMI,

$$\begin{bmatrix} PA_{CL}(p(t)) + A_{CL}^T(p(t))P + C_{CL}^T C_{CL} & PB_{CL}(p(t)) \\ B_{CL}^T(p(t))P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

Debido a que no se producen productos de matrices con dependencia paramétrica, se asegura que se cumple la Suposición 2.1 y es aplicable el Teorema 2.1.

Entonces, el sistema en lazo cerrado es cuadráticamente estable con desempeño cuadrático \mathcal{L}_2 acotado por γ si y sólo si existe P definida positiva, tal que,

$$\begin{bmatrix} PA_{CL}(p(i)) + A_{CL}^T(p(i))P + C_{CL}^T C_{CL} & PB_{CL}(p(i)) \\ B_{CL}^T(p(i))P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, 2^q \quad (3.18)$$

donde $A_{CL}(p(t))$ es $A_{CL1}(p(t))$ o $A_{CL2}(p(t))$.

En la siguiente sección se dan fórmulas explícitas del parámetro libre de los controladores LTI para las configuraciones de uno y dos parámetros que resuelve un problema de sensibilidad mezclada cuando se tiene un modelo de incertidumbre aditivo a la salida, basado en las fórmulas explícitas de los trabajos de [22] y [21].

3.4. PTCE para modelos de incertidumbre aditivos

El objetivo de esta sección es dar la fórmula explícita para un controlador LTI junto con su parámetro libre cuando se tiene un criterio de desempeño que consisten en regular la salida $y(t)$ a pesar de perturbaciones aditivas a la salida $d_o(t)$ en bajas frecuencias, cuando se tiene un modelo de incertidumbre aditivo, que corresponde minimizar la función $K(s)S_o(s)$ de acuerdo a la Tabla 2.1, comúnmente en altas frecuencias; al minimizar esta función, también se limita la magnitud de $u(t)$ en esa

banda de frecuencias de acuerdo a la relación mostrada en (2.51) y (2.56); logrando así, estabilidad robusta ante incertidumbre del modelo y desempeño robusto ante perturbaciones externas.

Entonces el criterio de sensibilidad mezclada, que es un caso particular de (2.60), es,

$$J_5 := \left\| \begin{bmatrix} S_{ol} \\ K_h S_{oh} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \quad (3.19)$$

donde S_{ol} es la función de sensibilidad a la salida aproximada en bajas frecuencias y $K_h S_{oh}$ representa la función $K(s)S_o(s)$ aproximada en altas frecuencias.

Una solución para este criterio se tiene en el siguiente Lema.

Lema 3.2 *Considere la planta LTI (2.33) con las condiciones dadas en (2.34) y (2.35) para las configuraciones de las Figuras 2.1 y 2.2, el parámetro libre del controlador (2.27) $R_2 := qW - X_1$, donde $W = A_{22}a + 3a^2I_m + X_1$ y X_1 definido en (2.44), entonces el criterio (3.19) tiene solución con,*

$$q^* = \frac{\|B_m^{-1}W A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_{\infty}}{\|B_m^{-1}W A_{12}^{-1}C_{11}^{-1}\|_{\infty} - \frac{1}{a^4} \|(C_{11}A_{12}W A_{21}C_{11}^{-1})\|_{\infty}} \quad (3.20)$$

Prueba.

De [20], se tienen las siguientes representaciones de $K(s)S_o(s)$ y $S_o(s)$ en base a las Factorizaciones Coprimas de la planta y la solución de la ecuación Diofántica presentada en la ecuación (2.31),

$$K(s)S_o(s) = (\tilde{X}(s) + D_P(s)R_2(s))\tilde{D}_P(s) \quad (3.21)$$

$$S_o(s) = \tilde{Y}(s) - N_P(s)R_2(s) \quad (3.22)$$

Del trabajo de [21](ver sección 2.4), se toman las expresiones analíticas de la FCD y FCI de la planta dadas de la ecuación (2.36) a la ecuación (2.39) y la solución de la ecuación Diofántica (2.31) dada en las ecuaciones (2.42) y (2.43).

La aproximación de la norma infinito para la función $K(s)S_o(s)$ resulta,

$$\|K_h S_{oh}\|_{\infty} = \|(B_m^{-1}(X_d + R_2)A_{12}^{-1}C_{11}^{-1})\|_{\infty} \quad (3.23)$$

mientras que para la función $S_o(s)$,

$$\|S_{ol}\|_{\infty} = \frac{1}{a^4} \|(C_{11}A_{12}[A_{22}a + 3a^2I - R_2])(A_{21}C_{11}^{-1})\|_{\infty} \quad (3.24)$$

donde $X_d = (A_{22} + 3aI_m)A_{22} + A_{21}A_{12} + 3a^2I_m$ y a es un parámetro libre.

Definiendo el parámetro libre R_2 , como es propuesto en el Lema 3.2, se asegura la intersección de las rectas que describen las normas de las funciones $K_h S_{oh}$ y S_{ol} en función de los parámetros a y q que cambia entre 0 a 1 como se muestra en la Figura 3.3, siendo q^* , dado en la ecuación (3.20), el valor deseado para q .

□

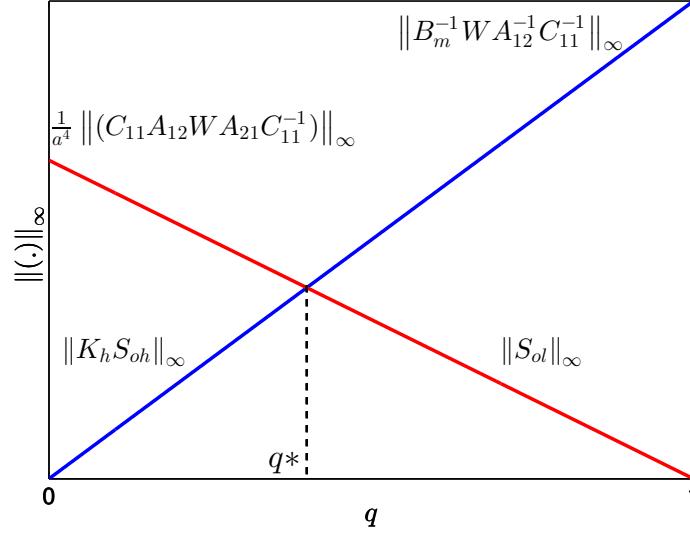


Figura 3.3: Intersección de las rectas descritas en función de los parámetros a y q .

Al minimizar $S_o(s)$ en bajas frecuencias con el criterio (3.19), también, se logra dar regulación de acuerdo a la relación en (2.49) en bajas frecuencias, para la configuración retroalimentada de la Figura 2.1, mientras que para la configuración de la figura 2.2 la relación de entrada $r(s)$ a salida $y(s)$ dada en (2.55) es,

$$S_o(s) P(s) K_r(s) = N_P(s) Q(s) \quad (3.25)$$

de acuerdo a las relaciones entre (3.21), (3.22) y (2.32).

Entonces se propone que el parámetro libre $Q(s)$ del controlador de referencia $K_r(s)$ sea,

$$Q = a^2 A_{12}^{-1} C_{11}^{-1} \quad (3.26)$$

para lograr regulación en bajas frecuencias.

A continuación, se presentan los sistemas a los que fueron aplicados los resultados de esta tesis.

3.5. Cálculo de coordenadas politópicas

En esta sección, se presenta un algoritmo propuesto para la obtención de las coordenadas politópicas basado en una noción de distancia.

Defina las siguientes funciones,

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &:= \sqrt{\underline{\delta}_1^2(t) + \underline{\delta}_2^2(t) + \cdots + \underline{\delta}_{q-1}^2(t) + \underline{\delta}_q^2(t)} \\
\Delta_2 &:= \sqrt{\underline{\delta}_1^2(t) + \underline{\delta}_2^2(t) + \cdots + \underline{\delta}_{q-1}^2(t) + \overline{\delta}_q^2(t)} \\
\Delta_3 &:= \sqrt{\underline{\delta}_1^2(t) + \underline{\delta}_2^2(t) + \cdots + \overline{\delta}_{q-1}^2(t) + \underline{\delta}_q^2(t)} \\
\Delta_4 &:= \sqrt{\underline{\delta}_1^2(t) + \underline{\delta}_2^2(t) + \cdots + \overline{\delta}_{q-1}^2(t) + \overline{\delta}_q^2(t)} \\
&\vdots \\
\Delta_{2^{q-1}} &:= \sqrt{\overline{\delta}_1^2(t) + \overline{\delta}_2^2(t) + \cdots + \overline{\delta}_{q-1}^2(t) + \underline{\delta}_q^2(t)} \\
\Delta_{2^q} &:= \sqrt{\overline{\delta}_1^2(t) + \overline{\delta}_2^2(t) + \cdots + \overline{\delta}_{q-1}^2(t) + \overline{\delta}_q^2(t)}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

donde,

$$\overline{\delta}_i(t) := \overline{p}_i - p_i(t) \tag{3.28}$$

$$\underline{\delta}_i(t) := p_i(t) - \underline{p}_i \tag{3.29}$$

Defina,

$$\begin{aligned}
\nu_1 &:= \Delta_2 \Delta_3 \cdots \Delta_{2^{q-1}} \Delta_{2^q} \\
\nu_2 &:= \Delta_1 \Delta_3 \cdots \Delta_{2^{q-1}} \Delta_{2^q} \\
\nu_3 &:= \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_{2^{q-1}} \Delta_{2^q} \\
&\vdots \\
\nu_{2^{q-1}} &:= \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_{2^{q-2}} \Delta_{2^q} \\
\nu_{2^q} &:= \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_{2^{q-2}} \Delta_{2^{q-1}}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Defina Γ de la siguiente forma,

$$\Gamma := \sum_{i=1}^{2^q} \nu_i \tag{3.31}$$

Las coordenadas politópicas se definen de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &:= \frac{\nu_1}{\Gamma} \\
 \alpha_2 &:= \frac{\nu_2}{\Gamma} \\
 \alpha_3 &:= \frac{\nu_3}{\Gamma} \\
 &\vdots \\
 \alpha_{2^q-1} &:= \frac{\nu_{2^q-1}}{\Gamma} \\
 \alpha_{2^q} &:= \frac{\nu_{2^q}}{\Gamma}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Es posible reducir el número de operaciones, evitando el cómputo de algunas operaciones en (3.27), que tienen una noción de distancia, es decir,

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &:= \underline{\delta}_1(t) + \underline{\delta}_2(t) + \cdots + \underline{\delta}_{q-1}(t) + \underline{\delta}_q(t) \\
 \Delta_2 &:= \underline{\delta}_1(t) + \underline{\delta}_2(t) + \cdots + \underline{\delta}_{q-1}(t) + \bar{\delta}_q(t) \\
 \Delta_3 &:= \underline{\delta}_1(t) + \underline{\delta}_2(t) + \cdots + \bar{\delta}_{q-1}(t) + \underline{\delta}_q(t) \\
 \Delta_4 &:= \underline{\delta}_1(t) + \underline{\delta}_2(t) + \cdots + \bar{\delta}_{q-1}(t) + \bar{\delta}_q(t) \\
 &\vdots \\
 \Delta_{2^q-1} &:= \bar{\delta}_1(t) + \bar{\delta}_2(t) + \cdots + \bar{\delta}_{q-1}(t) + \underline{\delta}_q(t) \\
 \Delta_{2^q} &:= \bar{\delta}_1(t) + \bar{\delta}_2(t) + \cdots + \bar{\delta}_{q-1}(t) + \bar{\delta}_q(t)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

debido a que la sumatoria $\sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i = 1$ está garantizada por las definiciones dadas en (3.30), (3.31) y (3.32).

3.6. Robot planar rotacional de dos grados de libertad

En esta sección se aplica el control LPV a un modelo no-lineal y a un modelo LPV de un Robot Planar Rotacional (RPR) de dos Grados de Libertad (2DOF) mostrado en la Figura 3.4.

En este ejemplo, se considera que la masa m_2 es variante en el tiempo. Entonces, primero se obtiene un modelo LPV del sistema; la función Lagrangiana, donde las coordenadas generalizadas son los ángulos q_1 y q_2 , es,

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = T(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t)) \tag{3.34}$$

donde, T corresponde a la energía cinética y V a la energía potencial,

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}m_1 l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1^2 \cos(q_2) + m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2) \\ & + \frac{1}{2}m_2 l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$V = -m_2 g l_{c1} \sin(q_1) - m_2 g l_1 \sin(q_1) - m_2 g l_{c2} \sin(q_1 + q_2) \quad (3.36)$$

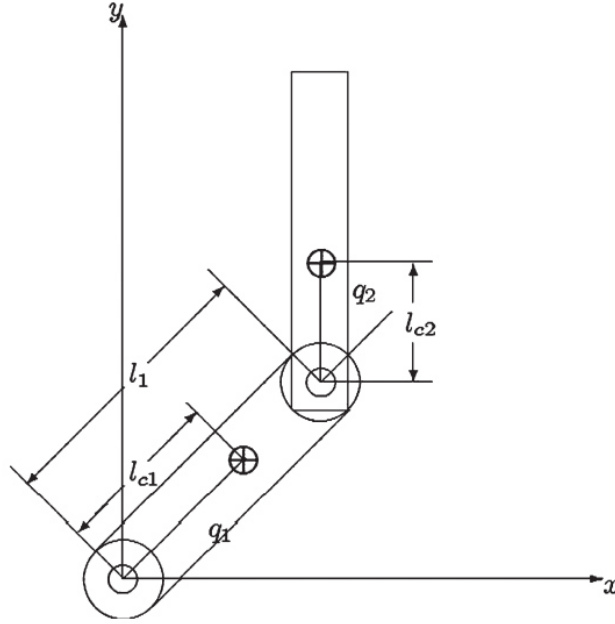


Figura 3.4: Descripción en coordenadas del RPR de 2DOF.

Entonces, aplicando la Transformación de Legendre,

$$H(\bar{q}, q, t) = \bar{q}^T \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \quad (3.37)$$

obtenemos el Hamiltoniano y linealizando (ver Apéndice 5) en el punto de equilibrio deseado $q_e = [\frac{\pi}{2}, 0]$, obtenemos la siguiente representación en espacio de estados,

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\bar{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}(p(t)) \\ A_{21}(p(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} \tau \quad (3.38)$$

donde q son las coordenadas generalizadas y \bar{q} sus momentos conjugados, y,

$$A_{12}(p(t)) = \begin{bmatrix} p_2(t) p_1(t) l_{c2}^2 + p_2(t) J_2 & -p_2(t) p_1(t) \alpha_1 - p_2(t) J_2 \\ -p_2(t) p_1(t) \alpha_1 - p_2(t) J_2 & p_2(t) p_1(t) \alpha_2 + p_2(t) \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_{21}(p(t)) = \begin{bmatrix} p_1(t) g l_1 + p_1(t) g l_{c2} + m_1 l_{c1} & p_1(t) g l_{c2} \\ p_1(t) g l_{c2} & p_1(t) g l_{c2} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$B_m = I_2 \quad (3.41)$$

donde $p_1(t) = m_2(t)$, $\alpha_1 = l_{c2}^2 + l_1 l_{c2}$, $\alpha_2 = l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c1}$, $\alpha_3 = m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_2$, y $p_2(t) = 1/(m_2(t)(l_1^2 J_2 + l_{c2}^2 J_1 + m_1 l_{c1}^2 l_{c2}^2) + m_1 l_{c1}^2 + J_1 J_2)$ con dependencia variante en el tiempo debido a $m_2(p(t))$; l_{c1} y l_{c2} son las distancias al centro de masas desde las uniones, J_1 y J_2 son los momentos de inercia de las uniones y g es la aceleración de la gravedad.

Para este ejemplo, se considera que se tienen mediciones de las posiciones angulares para ser retroalimentadas; es decir,

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \bar{q} \end{bmatrix}, \quad C_{11} = I_2 \quad (3.42)$$

La matriz A del sistema (3.38), presenta dependencia paramétrica multiafín que satisface la Suposición 2.1, llevando al sistema a una representación politópica de cuatro vértices correspondientes a los dos parámetros variantes en el tiempo considerados para este caso.

A continuación, se diseñan los controladores robustos LTI para los vértices.

Siguiendo el procedimiento de [21], se toman las Factorizaciones Coprimas explícitas (de 2.36 a 2.39) y una solución explícita de la ecuación Diofántica (2.31), en términos de la planta (3.38). El criterio de desempeño que se desea para este sistema está basado en el criterio de sensibilidad (2.61), por lo que el parámetro libre para la configuración retroalimentada de la Figura 3.1 toma la expresión de la ecuación (2.64) con solución en (2.65), mientras que para la configuración retroalimentada de la Figura 3.2 el parámetro libre Q del controlador de referencia K_r , se considera que tome la expresión (2.68).

Utilizando los datos de la Tabla 3.1 tomados de [34], y considerando que $p_1(t) \in [2, 6]$ y por lo tanto, $p_2(t) \in [3.71, 5.53]$. Los valores de los parámetros a y w_h seleccionados, y las normas obtenidas para las funciones T_{oh} y S_{ol} para los vértices, se muestran en la Tabla 3.2. Se realizan simulaciones para los vértices, donde se consideran condiciones iniciales $q_0 = [-\frac{\pi}{2}, 0]$, entrada de referencia $r = [\frac{\pi}{2}, 0]$, y perturbación aditiva a la salida $d_o(t) = 0.4 \sin(0.8t)$ a partir de los 3 segundos, para las configuraciones de las Figuras 2.1 y 2.2, y los resultados se muestran en las Figuras 3.5 y 3.6.

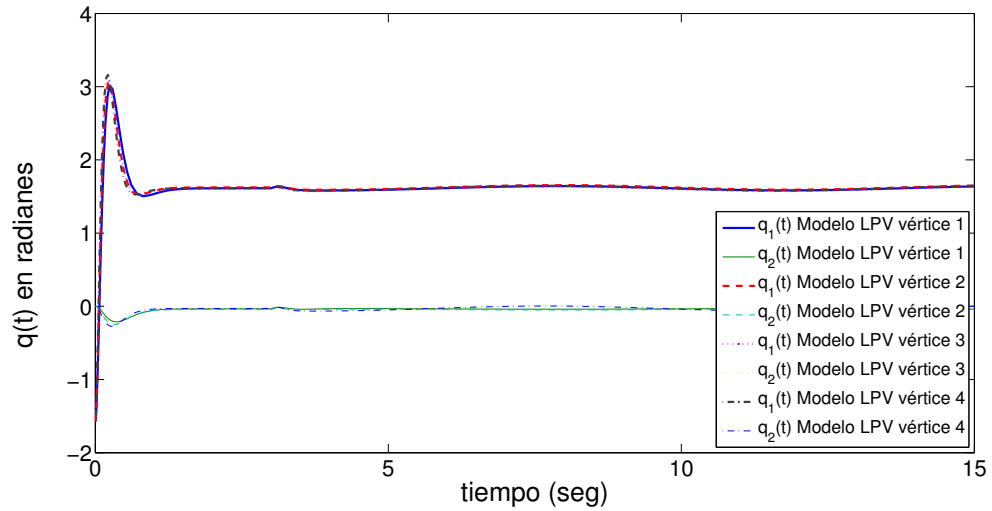
El análisis de estabilidad cuadrática para el sistema LPV en lazo cerrado, se obtuvo resolviendo la LMI de la ecuación (3.9) utilizando el LMI toolbox de MatLab [35]; se obtuvo para la configuración retroalimentada de la Figura 3.1, la siguiente

Parámetro	Valor	Unidad
l_1	0.450	m
l_{c1}	0.091	m
l_{c2}	0.048	m
m_1	23.902	Kg
I_1	1.266	$Kg\ m^2$
I_2	0.093	$Kg\ m^2$
g	9.81	$\frac{m}{s^2}$

Tabla 3.1: Valores de parámetros para RPR de 2DOF

Vértice	a	w_h	$\ T_{oh}\ _\infty$ y $\ S_{ol}\ _\infty$
$\underline{p_1}, \underline{p_2}$	8	100	0.0390
$\underline{p_1}, \overline{p_2}$	9	100	0.0496
$\overline{p_1}, \underline{p_2}$	9	100	0.0520
$\overline{p_1}, \overline{p_2}$	10	100	0.0652

Tabla 3.2: Valores de parámetros libres para RPR de 2DOF

Figura 3.5: Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$ de un parámetro para los vértices.

matriz P que da solución,

$$P = \begin{bmatrix} 0.532 & 0.046 & -0.005 & -0.051 & 0.088 & -0.007 & 0.036 & -0.004 \\ 0.046 & 0.310 & 0.009 & -0.141 & 0.002 & -0.002 & 0.140 & -0.007 \\ -0.005 & 0.009 & 0.002 & -0.024 & -0.001 & 0.000 & 0.013 & 0.007 \\ -0.051 & -0.141 & -0.024 & 0.384 & -0.025 & -0.013 & -0.224 & -0.123 \\ 0.088 & 0.002 & -0.001 & -0.025 & 0.028 & 0.006 & 0.018 & 0.013 \\ -0.007 & -0.002 & 0.000 & -0.013 & 0.006 & 0.013 & 0.010 & 0.022 \\ 0.036 & 0.140 & 0.013 & -0.224 & 0.018 & 0.010 & 0.162 & 0.078 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

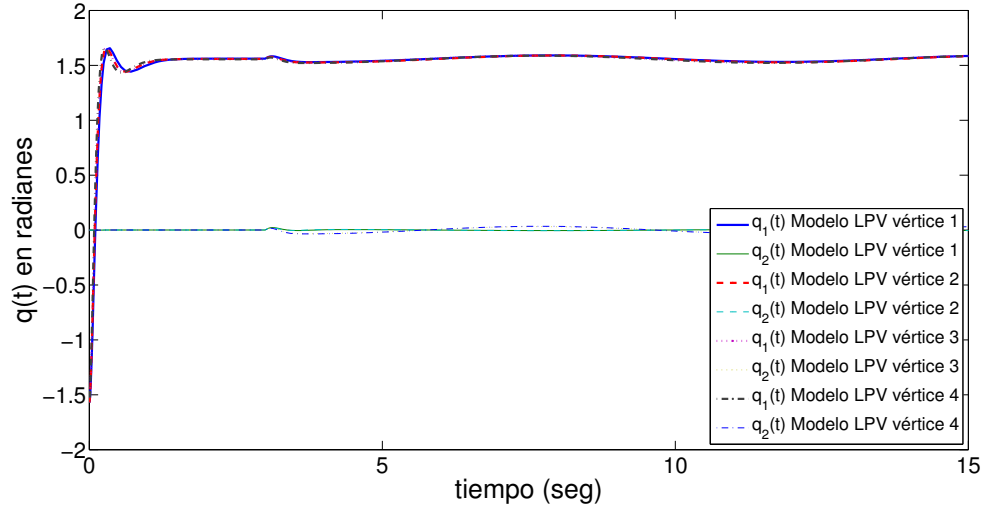


Figura 3.6: Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(s)$ de dos parámetros para los vértices.

mientras que para la configuración retroalimentada de la Figura 3.2, se obtuvo,

$$P = \begin{bmatrix} 1.597 & 0.105 & -0.019 & -0.125 & 0.298 & -0.015 & 0.110 & 0.045 \\ 0.105 & 1.244 & 0.055 & -0.862 & 0.032 & 0.055 & 0.799 & 0.174 \\ -0.019 & 0.055 & 0.009 & -0.112 & -0.006 & 0.003 & 0.071 & 0.039 \\ -0.125 & -0.862 & -0.112 & 1.678 & -0.073 & -0.087 & -1.107 & -0.633 \\ 0.298 & 0.032 & -0.006 & -0.073 & 0.094 & 0.016 & 0.060 & 0.045 \\ -0.015 & 0.055 & 0.003 & -0.087 & 0.016 & 0.035 & 0.071 & 0.064 \\ 0.110 & 0.799 & 0.071 & -1.107 & 0.060 & 0.071 & 0.834 & 0.421 \\ 0.045 & 0.174 & 0.039 & -0.633 & 0.045 & 0.064 & 0.421 & 0.484 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

El análisis de desempeño obtenido por el controlador LPV, también se analizó utilizando el LMI toolbox de Matlab, resolviendo la LMI (3.18), obteniendo un desempeño $\gamma = 8.3$ para todo el sistema en la configuración retroalimentada de la Figura 3.1, con la siguiente matriz P ,

$$P = \begin{bmatrix} 0.126 & 0.010 & -0.001 & -0.010 & 0.021 & -0.001 & 0.007 & -0.002 & 0.002 & -0.017 & 0.001 & -0.019 \\ 0.010 & 0.081 & 0.002 & -0.033 & 0.000 & -0.001 & 0.033 & -0.006 & 0.000 & -0.005 & 0.005 & -0.051 \\ -0.001 & 0.002 & 0.000 & -0.005 & 0.000 & 0.000 & 0.002 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.001 & 0.000 \\ -0.010 & -0.033 & -0.005 & 0.084 & -0.004 & -0.001 & -0.047 & -0.015 & -0.001 & 0.000 & -0.018 & -0.003 \\ 0.021 & 0.000 & 0.000 & -0.004 & 0.007 & 0.001 & 0.003 & 0.001 & 0.001 & 0.000 & 0.001 & 0.001 \\ -0.001 & -0.001 & 0.000 & -0.001 & 0.001 & 0.003 & 0.000 & 0.003 & 0.001 & 0.007 & 0.000 & 0.006 \\ 0.007 & 0.033 & 0.002 & -0.047 & 0.003 & 0.000 & 0.034 & 0.009 & 0.001 & 0.000 & 0.011 & -0.004 \\ -0.002 & -0.006 & 0.000 & -0.015 & 0.001 & 0.003 & 0.009 & 0.022 & 0.001 & 0.007 & 0.007 & 0.042 \\ 0.002 & 0.000 & 0.000 & -0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.028 & 0.109 & 0.001 & 0.006 \\ -0.017 & -0.005 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.007 & 0.000 & 0.007 & 0.109 & 0.992 & 0.005 & 0.055 \\ 0.001 & 0.005 & 0.001 & -0.018 & 0.001 & 0.000 & 0.011 & 0.007 & 0.001 & 0.005 & 0.039 & 0.153 \\ -0.019 & -0.051 & 0.000 & -0.003 & 0.001 & 0.006 & -0.004 & 0.042 & 0.006 & 0.055 & 0.153 & 1.418 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

mientras que para la configuración retroalimentada de la Figura 3.2, se obtuvo un desempeño $\gamma = 6.2$ con la siguiente matriz P ,

$$P = \begin{bmatrix} 0.962 & 0.072 & -0.002 & -0.134 & 0.165 & -0.018 & 0.089 & 0.047 & 0.032 & -0.091 & 0.079 & 0.175 \\ 0.072 & 1.832 & 0.073 & -1.033 & 0.020 & 0.028 & 1.138 & 0.179 & -0.101 & 0.108 & 0.588 & 0.431 \\ -0.002 & 0.073 & 0.008 & -0.108 & -0.002 & 0.001 & 0.076 & 0.030 & -0.002 & 0.006 & 0.052 & 0.109 \\ -0.134 & -1.033 & -0.108 & 1.496 & -0.039 & -0.030 & -1.071 & -0.435 & -0.013 & -0.129 & -0.741 & -1.569 \\ 0.165 & 0.020 & -0.002 & -0.039 & 0.050 & 0.007 & 0.030 & 0.017 & 0.017 & 0.018 & 0.024 & 0.067 \\ -0.018 & 0.028 & 0.001 & -0.030 & 0.007 & 0.019 & 0.028 & 0.018 & 0.007 & 0.061 & 0.014 & 0.068 \\ 0.089 & 1.138 & 0.076 & -1.071 & 0.030 & 0.028 & 0.958 & 0.307 & -0.036 & 0.111 & 0.565 & 1.050 \\ 0.047 & 0.179 & 0.030 & -0.435 & 0.017 & 0.018 & 0.307 & 0.301 & 0.037 & 0.072 & 0.204 & 1.183 \\ 0.032 & -0.101 & -0.002 & -0.013 & 0.017 & 0.007 & -0.036 & 0.037 & 0.260 & 0.043 & 0.001 & 0.163 \\ -0.091 & 0.108 & 0.006 & -0.129 & 0.018 & 0.061 & 0.111 & 0.072 & 0.043 & 0.387 & 0.059 & 0.263 \\ 0.079 & 0.588 & 0.052 & -0.741 & 0.024 & 0.014 & 0.565 & 0.204 & 0.001 & 0.059 & 6.093 & 1.087 \\ 0.175 & 0.431 & 0.109 & -1.569 & 0.067 & 0.068 & 1.050 & 1.183 & 0.163 & 0.263 & 1.087 & 8.203 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Para la simulación del sistema en lazo cerrado aplicando el controlador LPV, se consideran las condiciones iniciales, entrada de referencia y señal de perturbación aditiva a la salida, consideradas para la simulación en los vértices, variación de los parámetros $p_1(t) = 4 + 2\exp(-0.2t)\cos(30t)$ y $p_2(t) = 4.62 + 0.9\exp(-0.2t)\sin(30t)$, y el cálculo de coordenadas politópicas presentado en la sección 2.2.4. En la Figura (3.7) se muestra la trayectoria paramétrica que sigue el sistema con una duración de 20 segundos.

En las Figuras 3.8 y 3.10 se muestran los resultados del controlador LPV aplicado al modelo LPV y al modelo no-lineal de la planta para las configuraciones retroalimentadas de las Figuras 3.1 y 3.2 respectivamente, donde interpolación 1 corresponde a la interpolación dada en las ecuaciones (3.11) y (3.13), e interpolación 2 representa la interpolación dada en las ecuaciones (2.23) y (3.10). Las Figuras 3.9 y 3.11 muestran la ley de control.

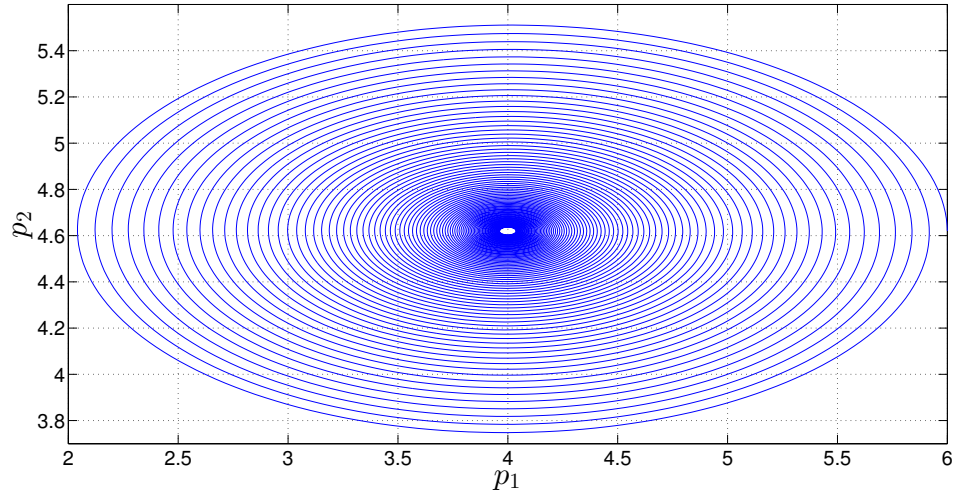


Figura 3.7: Trayectoria paramétrica para RPR de 2DOF.

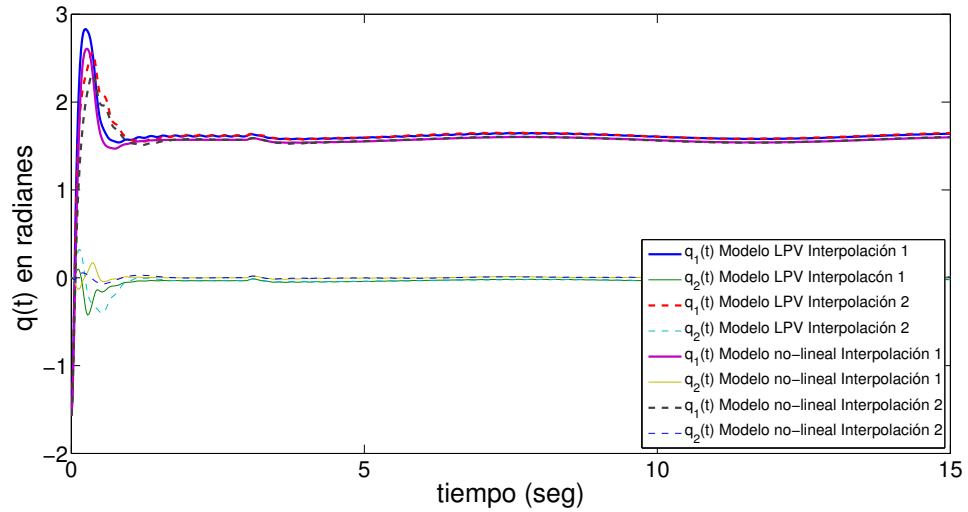


Figura 3.8: Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de un parámetro.

Los resultados mostrados en las Figuras 3.8 y 3.10, y las soluciones obtenidas para las LMIs (3.9) y (3.18), muestran que la estabilidad cuadrática se logra a pesar de las variaciones de los parámetros. La minimización de las normas del criterio (2.61), mostradas en la Tabla 3.2, se muestran para los vértices en las Figuras 3.5 y 3.6, donde se logra obtener regulación a una entrada escalón de referencia y atenuación a disturbios en la salida en bajas frecuencias, donde la perturbación corresponde aproximadamente a un 25 % de la magnitud de la referencia, atenuandola

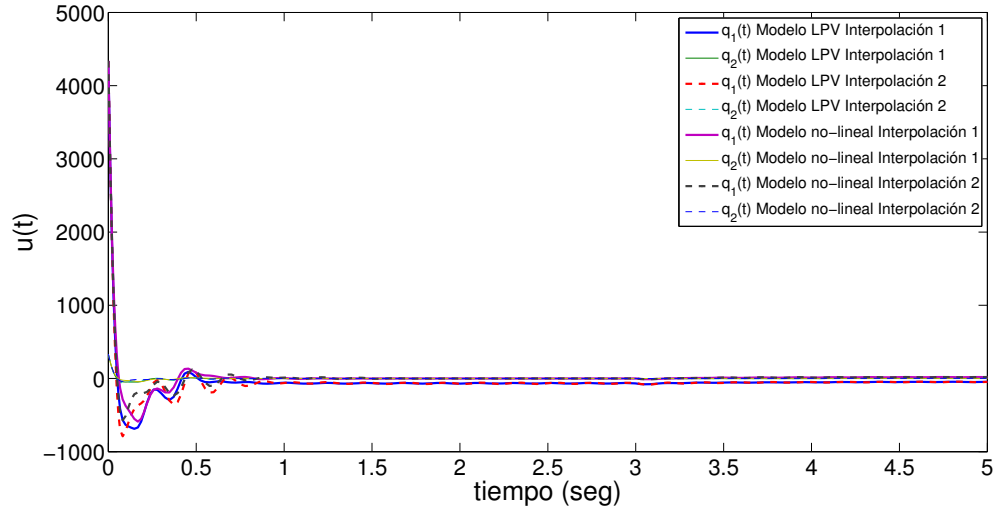


Figura 3.9: Ley de control $u(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de un parámetro.

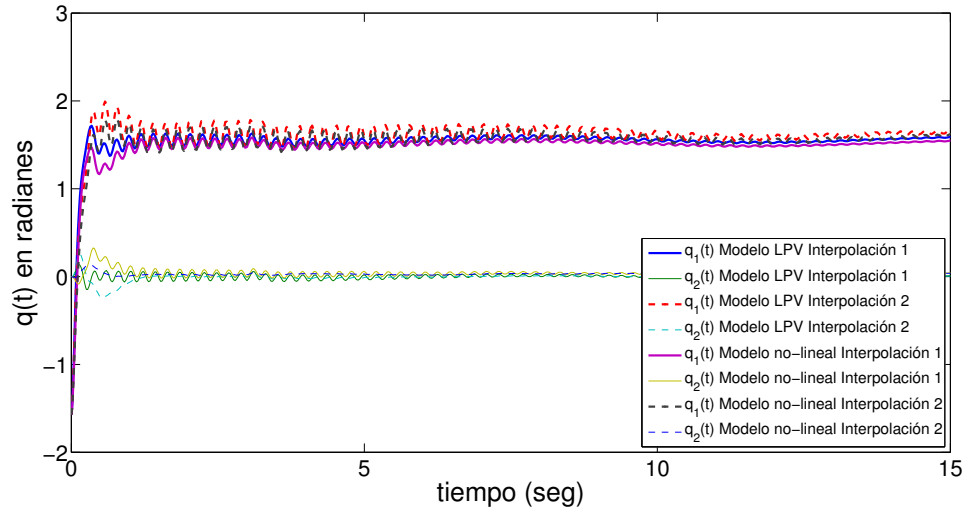


Figura 3.10: Posiciones $q(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de dos parámetros.

como se muestra en la oscilación en la respuesta después del transitorio; estas propiedades que se satisfacen en los vértices, se preservan para la planta LPV cuando se interpolan los controladores.

También, se muestran en las gráficas de las Figuras 3.8 y 3.10, que el transitorio mostrado en los vértices se preserva cuando se realiza la interpolación 1. Se muestra que la configuración con un controlador de un parámetro, el tiempo de respuesta es

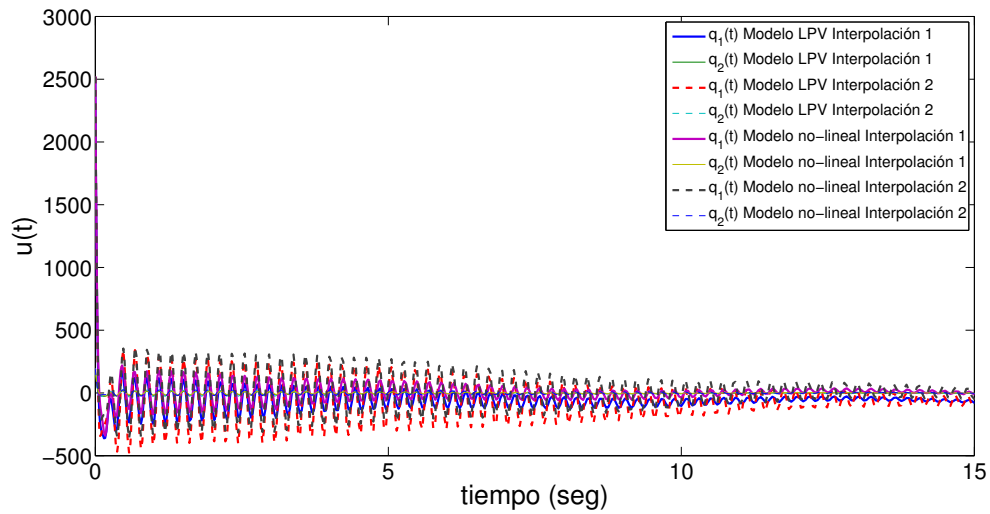


Figura 3.11: Ley de control $u(t)$ para configuración retroalimentada con un controlador $K(p)$ de dos parámetros.

más rápido que la configuración de dos parámetros, sin embargo, el precio a pagar es el sobreimpulso en el transitorio.

A continuación, se presenta un ejemplo práctico, donde el controlador LPV diseñado se aplica a un motor de CD.

3.7. Motor de CD

En esta sección, se aplica el control LPV a un motor de CD que es modelado como un sistema de primer orden, donde la ganancia estática y la constante de tiempo dependen de la velocidad angular, por lo que para esta aplicación se consideran como parámetros que varían en el tiempo con cotas previamente identificadas. El diagrama

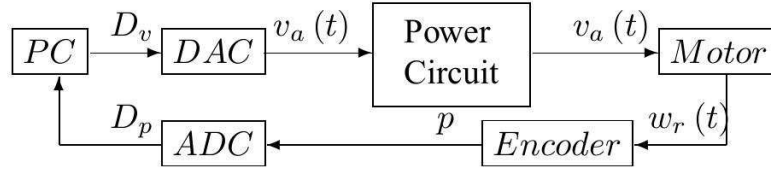


Figura 3.12: Diagrama a bloques del prototipo de laboratorio del motor de CD

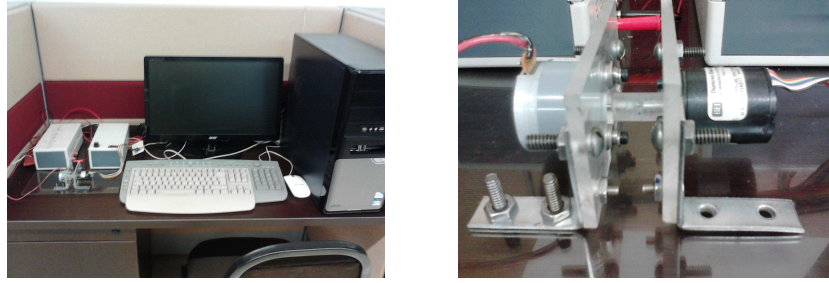


Figura 3.13: Prototipo de laboratorio del motor de CD (izquierda), motor de CD y encoder (derecha)

a bloques y prototipo de laboratorio del motor de CD se muestran en las Figuras 3.12 y 3.13, mientras que las ganancias k y constantes de tiempo τ para diferentes voltajes de referencia constante aplicados en lazo abierto, se muestran en la Tabla 3.3.

El modelo lineal propuesto para el motor de CD es la función de transferencia,

$$\frac{w_r(s)}{V_a(s)} = \frac{k}{\tau s + 1} \quad (3.47)$$

Basado en los datos experimentales de la Tabla 3.3, se obtienen los siguientes

V_a en V	w_{rss} en rpm	k	τ en seg.
5.0	1000	200.00	0.0934
5.5	1200	218.18	0.0791
6.0	1520	253.33	0.0770
6.5	1770	272.30	0.0730
7.0	2035	290.71	0.0708
7.5	2340	312.00	0.0725
8.0	2630	328.75	0.0793
8.4	2820	335.71	0.0747

Tabla 3.3: Parámetros del motor de DC

polinomios de interpolación que son utilizados para el modelo de simulación,

$$\begin{aligned} k(w_r) &= 3.1581 \times 10^{-14} w_r^5 - 2,6667 \times 10^{-10} w_r^4 + 8.3275 \times 10^{-7} w_r^3 \\ &\quad - 0.1174 \times 10^{-2} w_r^2 + 0.7916 w_r + 0.1859 \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \tau(w_r) &= 7.0832 \times 10^{-18} w_r^5 - 7.2560 \times 10^{-14} w_r^4 + 2.7888 \times 10^{-10} w_r^3 \\ &\quad - 4.8695 \times 10^{-7} w_r^2 + 3.6165 \times 10^{-4} w_r + 1.0208 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Los parámetros k y τ que dependen de w_r llevan al sistema a un modelo LPV, y una representación en espacio de estados es,

$$F(w_r) = \frac{-1}{\tau(w_r)}, \quad G(w_r) = \frac{k(w_r)}{\tau(w_r)}, \quad H = 1 \quad (3.50)$$

El modelo, es validado experimentalmente aplicando voltajes de 6.04, 6.5, 7, 7.5, 8 y 8.4 cada 5 segundos y con una entrada de referencia sinusoidal $V_a(t) = 8.4 \sin(0.1\pi)$ mostrados en las Figuras 3.14 y 3.15.

Para satisfacer el Lema 3.1, se propone el siguiente cambio de base para cada vértice,

$$T(p_{(i)}) := \frac{\tau_{(i)}}{k_{(i)}} \quad (3.51)$$

entonces, el modelo LPV propuesto en nuevas coordenadas es,

$$A_{(i)} = \frac{-1}{\tau_{(i)}}, \quad B = 1, \quad C = T^{-1} \quad (3.52)$$

Siguiendo el procedimiento de [22], se diseñan controladores robustos para cada vértice; aplicando la transformación bilineal $\lambda = 1/(s + a_{(i)})$ a (3.52), y se obtiene

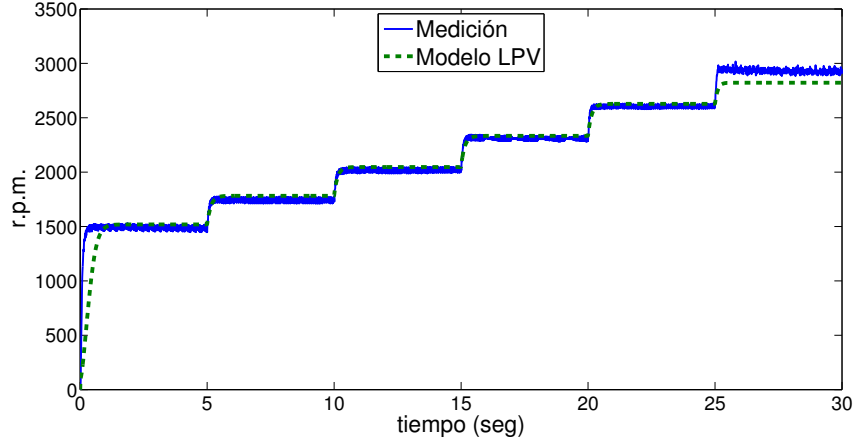


Figura 3.14: $w_r(t)$ en rpm del motor de CD y del modelo LPV para referencias escalón cada 5 segundos

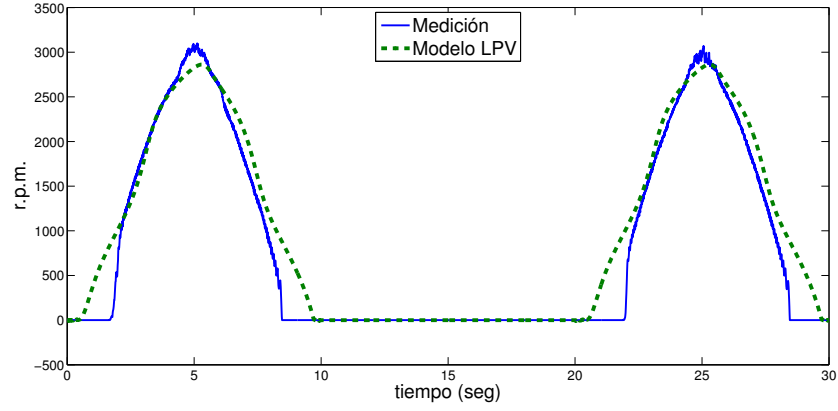


Figura 3.15: $w_r(t)$ en rpm del motor de CD y del modelo LPV para una referencia sinusoidal

la siguiente FCD de la planta,

$$N(s) D^{-1}(s) = \frac{\tau_{(i)}}{s + a_{(i)}} \left(\frac{\tau_{(i)} s + 1}{s + a_{(i)}} \right)^{-1} \quad (3.53)$$

Entonces, se encuentra una solución de la ecuación Diofántica (2.30),

$$X(s) = \frac{a_{(i)} \tau_{(i)} - 1}{\tau_{(i)}^2} \quad (3.54)$$

$$Y(s) = \frac{1}{\tau_{(i)}} \quad (3.55)$$

Una representación en espacio de estados de la fórmula explícita de la PTCE

para el diagrama retroalimentado de la Figura 3.1, es,

$$A_K = -a_{(i)} + R_{(i)}\tau_{(i)}^2, \quad B_K = 1, \quad C_K = R_{(i)}^2\tau_{(i)}^4, \quad D_K = \frac{a_{(i)}\tau_{(i)} + R_{(i)}\tau_{(i)}^3 - 1}{\tau_{(i)}} \quad (3.56)$$

mientras que para el diagrama retroalimentado de la Figura 3.2, K_r se propone la siguiente representación,

$$A_{K_r} = -a_{(i)} + R\tau_{(i)}^2, \quad B_{K_r} = Q_{(i)}R_{(i)}\tau_{(i)}^3, \quad C_{K_r} = 1, \quad D_{K_r} = Q_{(i)}R_{(i)}\tau_{(i)} \quad (3.57)$$

Para esta aplicación se propone como desempeño el criterio (2.61), por lo que las funciones $T_o(s)$ y $S_o(s)$ se aproximan en altas y bajas frecuencias respectivamente donde la solución se encuentra fijando el parámetro libre de la siguiente forma,

$$R_{1(i)} = \frac{a_{(i)} (w_{h(i)} - a_{(i)} (a_{(i)}\tau_{(i)} - 1))}{\tau_{(i)}^2 (w_{h(i)} + a_{(i)} (|2a_{(i)}\tau_{(i)} - 1| - |a_{(i)}\tau_{(i)} - 1|))} \quad (3.58)$$

y el parámetro libre $Q_{(i)}$,

$$Q_{(i)} = \frac{a_{(i)}}{\tau_{(i)}} \quad (3.59)$$

Aplicando el controlador $K(s)$ al modelo del motor de CD (3.50), se propusieron los parámetros de control $a_{(i)}$ y $w_{h(i)}$ para los diferentes puntos de operación, utilizando la configuración retroalimentada de la Figura 3.16 con entrada escalón $r(t) = 1(rpm)$ y $\beta = 1$; estos parámetros fueron utilizados como valores iniciales para las pruebas experimentales, y ambos resultados se muestran en la Tabla 3.4.

En la Tabla 3.4, se muestra que fue necesario reducir el valor del parámetro $w_{h(i)}$, lo cual se interpreta como que el ancho de banda debe ser reducido para pruebas experimentales para evitar saturaciones en la ley de control y lograr un valor de estado estacionario aceptable.

Para obtener el parámetro de control $q_{(i)}$ utilizado para las pruebas experimentales, se utilizaron los valores experimentales de $a_{(i)}$ y $w_{h(i)}$ en el modelo de simulación, donde se observó que para la salida, se presenta una relación de 0.54 veces la referencia, por lo que se propuso el parámetro libre como,

$$Q_{(i)} = \frac{0.54a_{(i)}}{\tau_{(i)}} \quad (3.60)$$

El comportamiento no-lineal de los parámetros del motor de CD que son funciones de $w_r(t)$, es aproximado por una función racional afin, esto quiere decir,

w_{rss} en rpm	simulación		experimental	
	$a_{(i)}$	$w_{h(i)}$	$a_{(i)}$	$w_{h(i)}$
1000	6	50	6.8	6.8
1200	8	30	9.7	9.7
1520	7	50	8.1	8.1
1770	7	20	8.5	8.5
2035	7	30	8.8	8.8
2340	7	20	8.6	8.6
2630	7.5	60	7.9	7.9
2820	7	40	8.4	8.4

Tabla 3.4: Parámetros de control de los controladores estabilizantes para diferentes puntos de operación.

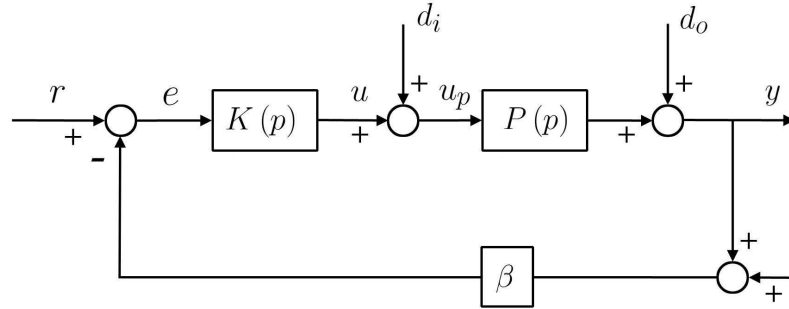


Figura 3.16: Configuración retroalimentada con un controlador de un parámetro para motor de CD

una hipercaja constante mostrada en la Figura 3.17, donde se encuentran todas las variaciones admisibles para los parámetros $k \in [200, 355.71]$ y $\tau \in [0.0708, 0.0934]$.

Una vez conociendo los vértices, se diseñan los controladores robustos LTI; los parámetros $a_{(i)}$ y $w_{h(i)}$ se proponen con la ayuda de la Tabla 3.4, y éstos se muestran en la Tabla 3.5.

El análisis de estabilidad cuadrática se analizó utilizando Multiparametric toolbox de Matlab [16] donde se obtuvo para la configuración retroalimentada de la Figura 3.1 la siguiente matriz P que satisface la LMI (3.9),

$$P = \begin{bmatrix} 1.2687 & 1.0671 \\ 1.0671 & 22.0889 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

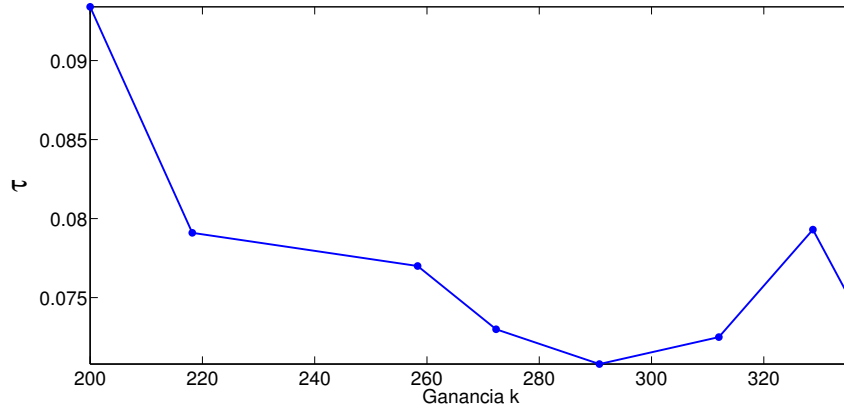


Figura 3.17: Hipercaja formada por los parámetros del motor de CD k y τ

vértice	$a = w_h$
$\underline{k}, \underline{\tau}$	8.8
$\underline{k}, \overline{\tau}$	6.8
$\overline{k}, \underline{\tau}$	8.8
$\overline{k}, \overline{\tau}$	6.9

Tabla 3.5: Parámetros de control en cada vértice

mientras que para la configuración retroalimentada de la Figura 3.2 la matriz P es,

$$P = \begin{bmatrix} 1.3817 & -1.173 & 0.0474 \\ -1.173 & 24.0827 & -0.5663 \\ 0.0474 & -0.5663 & 7.3539 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

El análisis de desempeño, se realizó resolviendo la LMI (3.18), donde, para la configuración retroalimentada de la Figura 3.1, se obtuvo un valor de $\gamma = 0.55$ con la siguiente matriz P ,

$$P = \begin{bmatrix} 0.0564 & -0.0536 \\ -0.0536 & 1.5546 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

y para la configuración retroalimentada de la Figura 3.2, un valor de $\gamma = 0.68$ con la siguiente matriz P ,

$$P = \begin{bmatrix} 0.0756 & 0.1317 & -0.0038 \\ 0.1317 & 2.7887 & -0.0882 \\ -0.0038 & -0.0882 & 0.0032 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

El controlador LPV se obtiene interpolando los 4 controladores robustos LTI diseñados para cada vértice utilizando la interpolación presentada en las ecuaciones (3.11) y (3.13); y el cálculo de coordenadas politópicas presentado en la sección 2.2.4.

La Figura 3.18, muestra los resultados experimentales de la velocidad del motor de CD para diferentes entradas escalón de referencia cuando se aplica el controlador LPV para la configuración retroalimentada de la Figura 3.2, donde se observa que las respuestas son suaves y que el error en estado estacionario es menor entre 1500 y 2000rpm. La Figura 3.19 muestra que la entrada de control es suave y sin saturaciones.

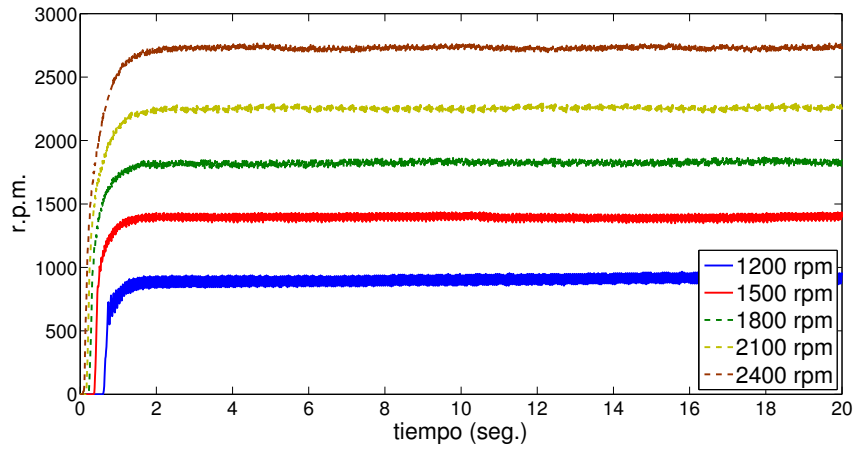


Figura 3.18: Resultados experimentales de $w_r(t)$ para entradas escalón de referencia.

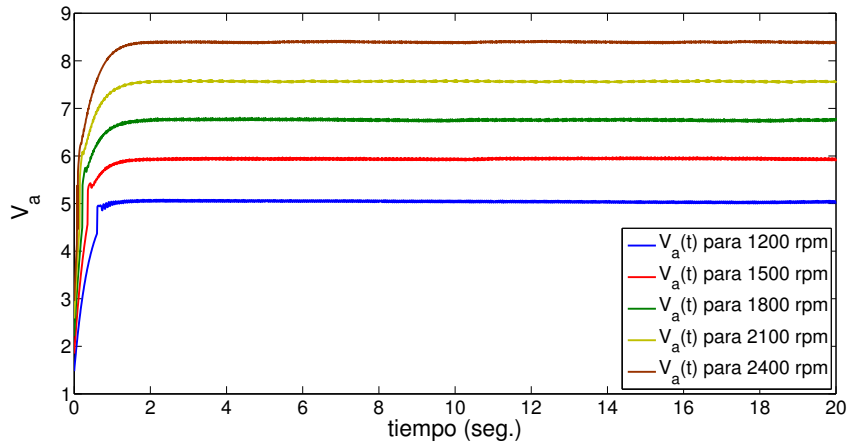


Figura 3.19: Resultados experimentales de $V_a(t)$ para entradas escalón de referencia.

También, utilizando un valor de $\beta = 10.5$ y un valor de $w_h = 200$ para los 4 vértices, utilizando la configuración retroalimentada de la Figura 3.16, se logran obtener errores en estado estacionario menores a los mostrados en la Figura 3.18; en contraste, los tiempos de respuesta son menores; estos resultados se muestran en las Figuras 3.20 y 3.21.

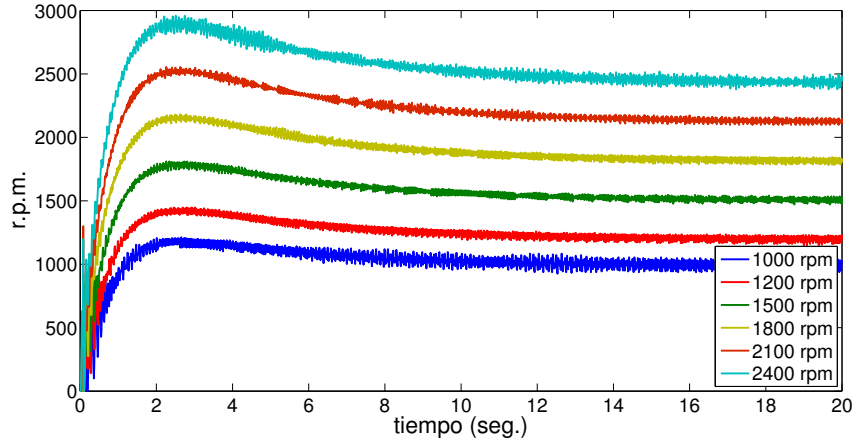


Figura 3.20: Resultados experimentales de $w_r(t)$ para entradas escalón de referencia.

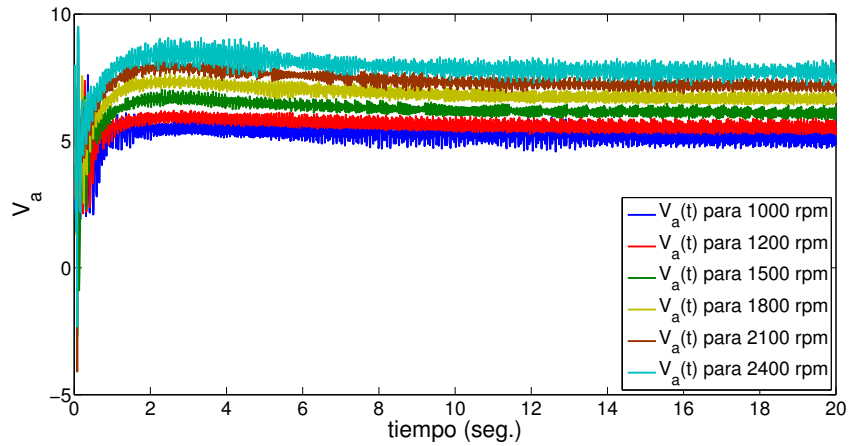


Figura 3.21: Resultados experimentales de $V_a(t)$ para entradas escalón de referencia.

3.8. Sistema de dos masas

En esta sección se aplica un controlador LPV a un sistema de dos masas mostrado en la Figura 3.22, donde k es la constante del resorte, b la constante de amortiguamiento y se asume que las masas m_1 y m_2 son variantes en el tiempo.

La función Lagrangiana dada en la ecuación (3.34), donde para este sistema las coordenadas generalizadas son las posiciones x_1 y x_2 , tiene energía cinética,

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (3.65)$$

y energía potencial,

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \quad (3.66)$$

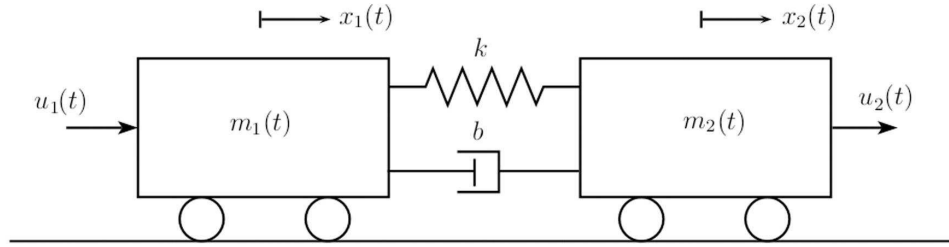


Figura 3.22: Sistema de dos masas

Aplicando la Transformación de Legendre, se llega a la siguiente representación en espacio de estados (ver apéndice 5.1.2),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{\bar{q}}_1(t) \\ \dot{\bar{q}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_1(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2(t) \\ k & -k & bp_1(t) & -bp_2(t) \\ -k & k & -bp_1(t) & bp_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \bar{q}_1(t) \\ \bar{q}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \bar{q}_1(t) \\ \bar{q}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

donde la matriz A tiene dependencia afín de los parámetros, satisfaciendo así la Suposición (2.1), la matriz B no presenta dependencia de parámetros y se considera

Vértice	a	$\ K_h S_{oh}\ _\infty$ y $\ S_{ol}\ _\infty$
$\underline{p_1}, \underline{p_2}$	9.0	0.1070
$\underline{p_1}, \overline{p_2}$	9.5	0.0963
$\overline{p_1}, \underline{p_2}$	11.3	0.1021
$\overline{p_1}, \overline{p_2}$	11.5	0.0990

Tabla 3.6: Valores de parámetros a para los vértices del sistema de dos masas.

que se tienen disponibles las mediciones de las posiciones x_1 y x_2 por lo que se satisfacen las condiciones de la sección (3.2).

Se considera para el desempeño, el criterio presentado en la sección 3.4 para modelos de incertidumbre aditivos, por lo que el parámetro libre R_2 de $K(s)$, toma la representación presentada en el Lema 3.2 con solución dada en la ecuación (3.20) para las configuraciones retroalimentadas de las Figuras 3.1 y 3.2, y el parámetro libre Q , el presentado en la ecuación (3.26).

Para las simulaciones, se considera que $b = 1N/m$, $k = 1Ns/m$, $m_1(t) \in [1, 1.5]Kg$ y $m_2(t) \in [2, 2.5]Kg$ por lo que $p_1(t) \in [\frac{1}{1.5}, 1] \in$ y $p_2(t) \in [\frac{1}{2.5}, 1]$ y entrada de referencia $r(t) = [0.5, 1]$. En la Tabla 3.6 se muestran los valores del parámetros a utilizados para el diseño de los controladores para los vértices y el valor de la norma que se obtiene para las funciones $K(s)S_o(s)$ y $S_o(s)$ aproximadas en altas y bajas frecuencias respectivamente; este valor, indica que se logra regulación a un 90 % aproximadamente a entradas de referencia $r(t)$ en bajas frecuencias. Las Figuras 3.24 y 3.25 muestran estos resultados.

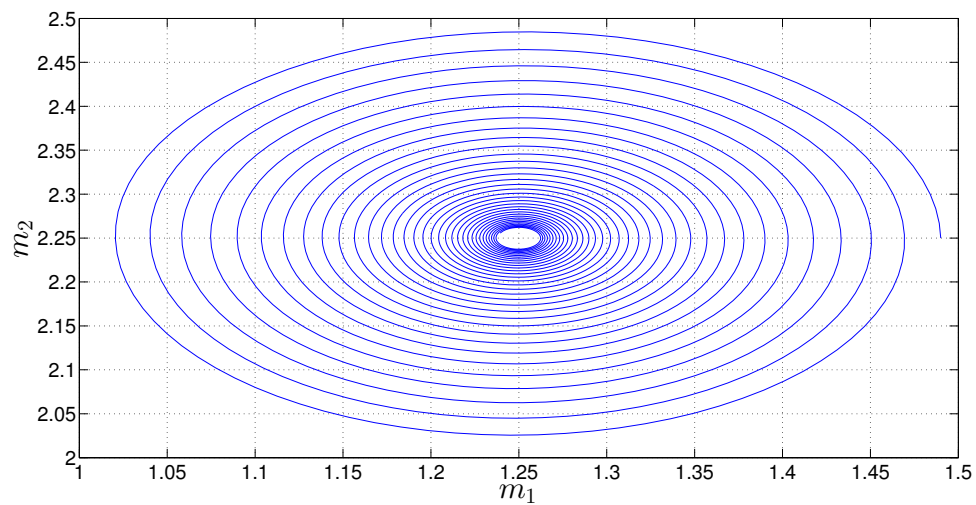


Figura 3.23: Trayectoria paramétrica para sistema de dos masas.

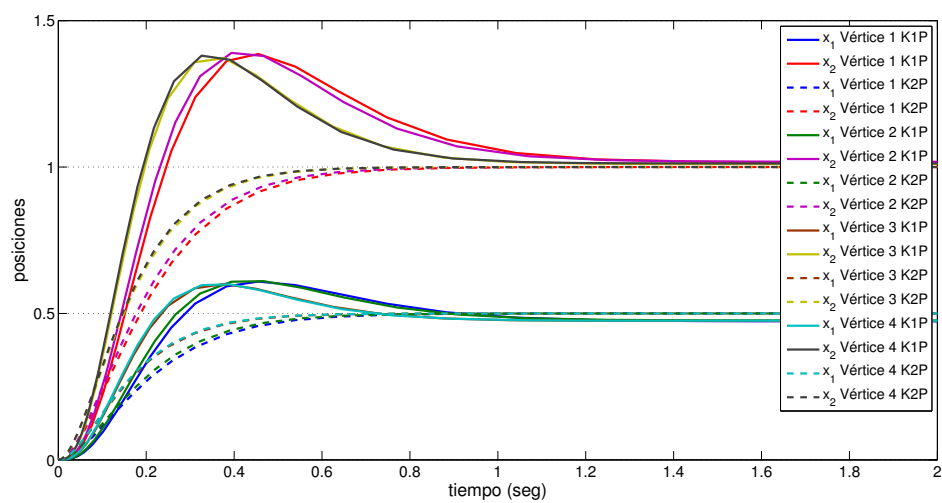


Figura 3.24: Posiciones $x(t)$ para para los vértices del sistema de dos masas.

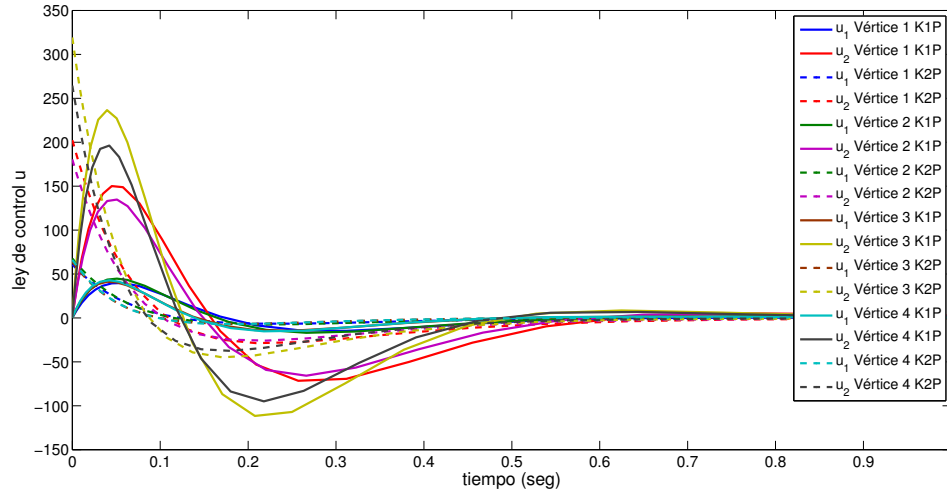


Figura 3.25: Ley de control $u(t)$ para para los vértices del sistema de dos masas.

Las Figuras 3.26 y 3.27, muestran los resultados al aplicar el controlador LPV de uno y dos parámetros, considerando variación de las masas $m_1(t) = 1.25 + 0.24\exp(-t)\cos(70t)$ y $m_2(t) = 2.25 + 0.24\exp(-t)\cos(70t)$ presentada en la Figura 3.23 con una duración de 3 segundos; se utiliza la interpolación presentada en las ecuaciones (3.11) y (3.13) con cálculo para las coordenadas politópicas presentado en la sección 3.5. En estas Figuras, se muestra que el sistema en lazo cerrado conserva las propiedades de los controladores en los vértices en cuanto a desempeño, logrando una regulación aproximadamente al 90 % como en los vértices cuando se aplica el controlador LPV de un parámetro y a la referencia deseada con un controlador de dos parámetros; también preserva el comportamiento en la respuesta transitoria.

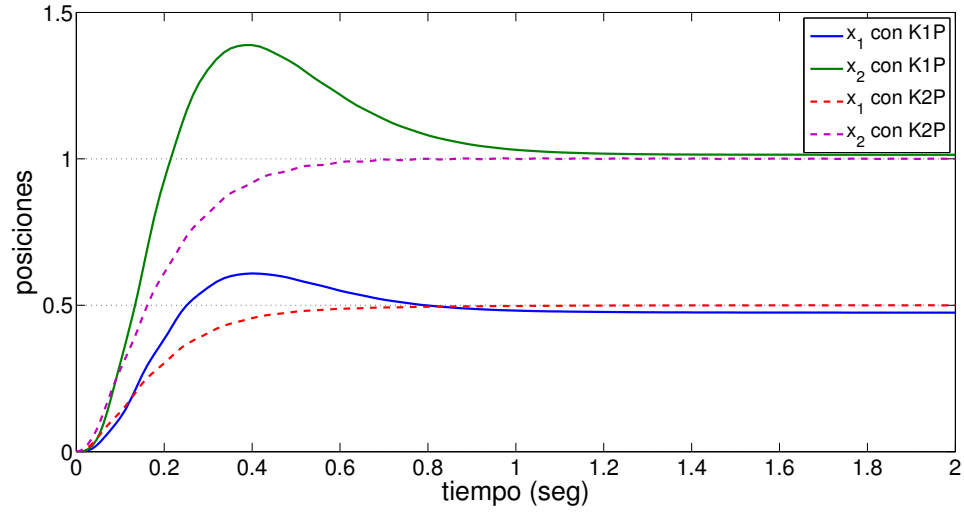


Figura 3.26: Posiciones $x(t)$ con un controlador de uno y dos parámetros para sistema de dos masas

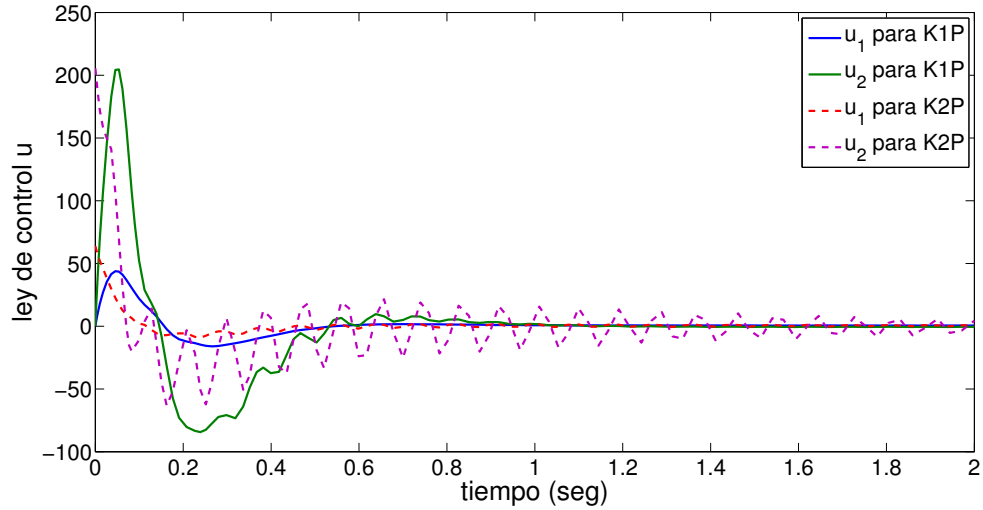


Figura 3.27: Ley de control $u(t)$ con un controlador de uno y dos parámetros para sistema de dos masas

Al resolver la LMI dada en la ecuación (3.9) para comprobar QS, no se encontró con una solución factible, lo cual se verificó al usar la interpolación presentada en las ecuaciones (2.23) y (3.10); sin embargo, para la interpolación presentada en las ecuaciones (3.11) y (3.13) el sistema preserva estabilidad como se muestra en estos resultados.

3.9. Conclusiones

En este capítulo se propusieron condiciones para el sistema LPV, en sus matrices de su representación en espacio de estados, para asegurar que el sistema en la lazo cerrado, para las configuraciones retroalimentadas con un controlador LPV de uno y dos parametros, sea posible analizar su estabilidad y desempeño mediante un número finito de LMIs.

Los controladores LTI diseñados para los vértices son controladores robustos que resuelven un problema de sensibilidad mezclada cuando se tiene un modelo de incertidumbre multiplicativo a la salida, aplicado a los ejemplos de un Robot Planar Rotacional de dos grados de libertad y a un motor de CD, y se propuso en este capítulo una fórmula explícita del parámetro libre, de los controladores basados en la PTCE, para sistemas que tienen una modelo de incertidumbre aditivo a la salida y fué aplicado a un sistema de dos masas, en donde también se aplicó el cálculo de coordenadas politópicas propuesto en este capítulo.

Además de interpolar las matrices de los controladores LTI en su representación en espacio de estados, se propuso interpolar los controladores LTI en su representación entrada salida-salida, donde el controlador LPV resultante presenta características de respuesta transitoria y ley de control similares a la de los vértices como se muestra en los ejemplos de un Robot Planar Rotacional y un sistema de dos masas.

Capítulo 4

Conclusiones generales y trabajos futuros

4.1. Conclusiones

En esta tesis se diseñan controladores LPV para sistemas Multi-Entrada Multi-Salida (MIMO) Lineales que presentan dependencia paramétrica variante en el tiempo afín o multiafín en sus matrices de su representación en espacio de estados, donde se asume que no se conocen las trayectorias de los parámetros pero se encuentran entre cotas conocidas y pueden ser medidos durante operación. Las cotas de los parámetros forman un politopo llevando al sistema LPV a una representación politópica con un número finito de vértices donde se diseñan controladores LTI.

El controlador LPV se obtiene mediante la interpolación de controladores robustos LTI basados en la Parametrización de Todos los Controladores Estabilizantes (PTCE), que resuelven un problema de sensibilidad mezclada y resolviendo un número finito de LMIs se asegura estabilidad cuadrática y una cota de desempeño del sistema en lazo cerrado para todas las trayectorias admisibles de los parámetros para configuraciones retroalimentadas de uno y dos parámetros.

La medición de los parámetros que se utiliza para la interpolación de los controladores robustos LTI y obtener el controlador LPV, que ajusta la ley de control y mejora el desempeño del sistema en lazo cerrado, se realiza mediante dos métodos; la diferencia que existe entre ellos es que en uno se interpolan todas las matrices de los controladores robusto LTI de su representación en espacio de estados resultando el controlador LPV con una dimensión, a lo más, igual que la dimensión de la

planta, en particular esta interpolación lleva al controlador LPV a una representación politópica; en el segundo método, se considera que se interpolan los controladores robustos LTI en su representación entrada-salida por lo que el orden del controlador LPV obtenido es, a los más, i -veces el orden de la planta, donde i es el número de vértices.

Una vez que se analiza estabilidad y desempeño para el sistema LPV, ambos métodos de interpolación producen controladores LPV que satisfacen el criterio de desempeño de sensibilidad mezclada, para el sistema LPV en lazo cerrado, diseñado para los vértices; además, el segundo método de interpolación tiene como ventaja que presenta las características en la respuesta transitoria y ley de control, que el diseñado en los vértices, que puede resultar útil cuando se tienen restricciones en la medición de la salida o en la ley de control.

4.2. Trabajos futuros

- Incorporar en el análisis de estabilidad y desempeño la velocidad de cambio de los parámetros.
- Extender el análisis de estabilidad y desempeño para más variables a regular.
- Extender los resultados para diferentes variables medidas.
- Incorporar en el análisis de estabilidad los parámetros de control de los controladores LTI y que al interpolarlos garanticen estabilidad.

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Modelo Hamiltoniano

El Hamiltoniano es una función de la cual se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de un sistema, estas ecuaciones son utilizadas en esta tesis debido a que es posible obtener de ellas, una realización en espacio de estados, donde la matriz B no depende de parámetros del sistema, siendo útil para esta tesis como se propone en la sección (3.2).

A partir del Lagrangiano,

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = T(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t)) \quad (5.1)$$

donde $T(\cdot)$ es la energía cinética, $V(\cdot)$ la energía potencial, $q(t)$ las coordenadas generalizadas y $\dot{q}(t)$ las velocidades generalizadas, es posible obtener el Hamiltoniano, substituyendo estas velocidades por momentos conjugados, definidos como,

$$\bar{q}(t) = \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \dot{q}(t)} \quad (5.2)$$

utilizando la transformación de Legendre,

$$H(\bar{q}(t), q(t), t) = \bar{q}^T(t) \dot{q}(t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (5.3)$$

donde, $\dot{q}(t)$ se obtiene invirtiendo las ecuaciones en (5.2)

Cuando la función de energía cinética es cuadrática, el momento generalizado es,

$$\bar{q}(t) = N(q(t)) \dot{q}(t) \quad (5.4)$$

y por lo tanto,

$$\dot{q}(t) = N^{-1}(q(t)) \bar{q}(t) \quad (5.5)$$

Entonces, el Hamiltoniano es,

$$H(\bar{q}(t), q(t), t) = \frac{1}{2} \bar{q}^T(t) N^{-1}(q(t)) \bar{q}(t) + V(q(t)) \quad (5.6)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H(.)}{\partial \bar{q}(t)} \\ &= N^{-1}(q(t)) \bar{q}(t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= -\frac{\partial H(.)}{\partial q(t)} + \tau \\ &= -\frac{1}{2} \bar{q}^T(t) \frac{\partial N^{-1}(q(t))}{\partial q(t)} \bar{q}(t) - \frac{\partial V(q(t))}{\partial q(t)} + \tau \end{aligned} \quad (5.8)$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento y linealizando en el punto de equilibrio $q(t) = q_e$ y $\bar{q}(t) = 0$, se llega a la siguiente representación en espacio de estados,

$$\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ \dot{\bar{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N^{-1}(q(t))|_{q_e} \\ -\frac{\partial^2 V(q(t))}{\partial q^2(t)}|_{q_e} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t) \\ \bar{q}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5.1.1. Hamiltoniano para RPR de 2 DOF

Del Lagrangiano dado en la ecuación (3.34) y utilizando la ecuación (5.2), se obtienen los momentos generalizados.

$$\bar{q}(t) = N(q(t)) \dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2(t)) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2(t)) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2(t)) & \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

donde,

$$\theta_1 := m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + J_1 \quad (5.11)$$

$$\theta_2 := m_2 l_{c2}^2 + J_2 \quad (5.12)$$

$$\theta_3 := m_2 l_1 l_{c2} \quad (5.13)$$

Entonces, se obtiene la inversa de $N(q(t))$ y se evalúa en el punto de equilibrio $q_e = [\frac{\pi}{2}, 0]$ para obtener la matriz A_{12} ,

$$\begin{aligned} N^{-1}(q(t))|_{q_e} &= \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - (\theta_3 \cos(q_2(t)))^2} \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_2 - \theta_3 \cos(q_2(t)) \\ -\theta_2 - \theta_3 \cos(q_2(t)) & \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2(t)) \end{bmatrix} \Big|_{q_e} \\ &= \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - (\theta_3)^2} \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_2 - \theta_3 \\ -\theta_2 - \theta_3 & \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.14)$$

substituyendo los elementos θ y separando los términos de la masa m_2 , se obtiene la equivalencia con la matriz dada en la ecuación (3.39).

Para obtener la matriz A_{21} , se utiliza la energía potencial dada en la ecuación (3.36), y evaluando en el punto de equilibrio,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \Big|_{q_e} = \\
 & \begin{bmatrix} g(m_2 l_1 \sin(q_1(t)) + m_2 l_{c2} \sin(q_1(t) + q_2(t)) + m_1 l_{c1} \sin(q_1(t))) & m_2 g l_{c2} \sin(q_1(t) + q_2(t)) \\ m_2 g l_{c2} \sin(q_1(t) + q_2(t)) & m_2 g l_{c2} \sin(q_1(t) + q_2(t)) \end{bmatrix} \Big|_{q_e} \\
 & = \begin{bmatrix} m_2 g l_1 + m_2 g l_{c2} + m_1 l_{c1} & m_2 g l_{c2} \\ m_2 g l_{c2} & m_2 g l_{c2} \end{bmatrix} \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

5.1.2. Hamiltoniano para sistema de dos masas

Del Lagrangiano que se obtiene de la energía cinética dada en la ecuación (3.65) menos la energía potencial dada en la ecuación (3.66) y utilizando la ecuación (5.2), se obtienen los momentos conjugados,

$$\bar{q}(t) = N(q(t)) \dot{q}(t) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

La matriz A_{12} se obtiene al invertir $N(q(t))$,

$$N^{-1}(q(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Para obtener la matriz A_{21} , se utiliza la energía potencial dada en la ecuación (3.66),

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

y usando la ecuación de Hamilton (5.7),

$$\begin{aligned}
 \tau &= \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{b}{m_1} & \frac{-b}{m_2} \\ \frac{-b}{m_1} & \frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

se obtienen las matrices A_{22} y B_m

5.2. Artículo

El artículo con nombre "Linear parametric time-varying control methodology applied to multiafin parametric time-varying systems", fue sometido a 13th European Control Conference (ECC) de Junio del 2014.

Linear parametric time-varying control methodology applied to multiafin parametric time-varying systems

R. Galindo¹ and M.A. Flores²

Abstract— A Linear Parametric time-Varying (LPV) controller is designed for a Multiafin Parametric time-Varying (MPV) plant following a proposed methodology. The state space realization of the MPV plant is a multi-affine function of a time varying parameter. This parameter is measured in real time and lies between given bounds. In this methodology, robust stabilizing controllers are synthesized for each vertex of the convex hull of the plant. Then, an LPV controller is designed by interpolation of the robust controllers, and finally Quadratic Stability (QS) of the closed loop system is guaranteed by the Vertex Theorem solving a set of Linear Matrix Inequalities (LMI's), in which convexity is assured. In particular, robust controllers based on the parametrization of all stabilizing controllers, and their free parameters are fixed solving a mixed sensitivity criterion. The results are illustrated by a simulation example of a two degrees of freedom planar rotational robot.

Keywords: Linear Parametric Varying (LPV), Quadratic Stability, Linear Matrix Inequality (LMI), Stabilizing controllers, Mixed sensitivity.

I. INTRODUCTION

One of the main concerns in real world applications is that the control must preserve stability and performance even in the presence of uncertainty conditions and disturbances, such as unmodelled dynamics, non-linearities, parametric uncertainties, load variations, vibrations, and aging. Evidently, the performance of the control law is deteriorated by these heavily operating conditions. Robust control techniques deal with these situations, in particular Linear Parametric Varying (LPV) control preserves stability and performance under fast time-variations of the plant parameters. Also, the Multiafin Parametric time-Varying (MPV) plant is closer to the real non-linear plant than a linear time-invariant plant. These MPV systems have parameters that belong to given known intervals and have a state space realization which is a multi-affine function of these time varying parameters. Modeling a plant as an MPV model allows designing a controller for each vertex of the convex hull of the plant, and the LPV control is gotten by interpolation. In this work, robust stabilizing controllers are designed at each vertex of the convex hull of the plant, adding their robust properties to the overall LPV control. Also, convexity is assured in closed loop when the LPV control is applied to the MPV plant using the plant parameters measurement. For this MPV system, quadratic stability is achieved solving Linear Matrix Inequalities (LMI's) at each

vertex of the convex hull of the plant, these LMI's are based on the vertex Theorem (see [11], [2], [4], and [19]). The MPV systems have more information than the LTI systems, holding many mathematical properties due to their parametric affinity. These systems can represent non-linear systems approximated by polynomials or non-linear systems linearized along a time varying trajectory, so, the LPV control has been applied for instance to coupled tanks [1], flexible robots [3], unmanned aerial vehicles [14], and even to a DC motor [10].

Also, it is considered that the Linear Time Invariant (LTI) systems at each vertex of the convex hull of the plant, that is, $P_1(s), \dots, P_{2q}(s)$ where q is the number of time varying parameters, are subject to admissible disturbances, *i.e.*, of bounded energy and admissible uncertainties, that is, of bounded \mathcal{H}_∞ -norm. Hence, robust stabilizing controllers are designed for $P_1(s), \dots, P_{2q}(s)$, in particular, the parametrization of all stabilizing controllers gives a solution to the synthesis problem for LTI plants as proposed by [17], [13], [5] and [18]. Moreover, a formula for the stabilizing controllers is given by [7]. The controllers stabilize $P_1(s), \dots, P_{2q}(s)$ and the performance problems can be solved by their free control parameters (see [18]). For instance, in [6] these free parameters solve a mixed sensitivity criterion, that minimizes the \mathcal{H}_∞ -norm of the output sensitivity function, improving the regulation and the attenuation of output additive disturbances, and minimizes the \mathcal{H}_∞ -norm of the transfer function from the output to the input of the uncertainty, preserving stability under uncertainties. The method is based on which usually the disturbances are of low frequencies and on which the mathematical models are more exact and accurate in low frequencies, neglecting generally the high frequency dynamics.

The main result is given in section II where an LPV control methodology for MPV systems is proposed and quadratic stability is analyzed. In section III the results are illustrated by a simulation example of a two-degrees-of-freedom planar rotational robot.

Notation. $\theta_{(i)}$ denotes the i -vertex of the hyperbox of a continuous function $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$, that remains between given time-invariant bounds, *i.e.*, $\theta_i(t) \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$; $\mathcal{R}(s)$ denotes the set of all rational functions of the complex variable s with real coefficients; \mathcal{RH}_∞ the set of proper stable rational functions; \mathbb{R} the set of real numbers; $A_l := \lim_{s \rightarrow 0} A(s)$ and $A_h := \lim_{s \rightarrow \infty} A(s)$ are the asymptotic approximations of a matrix $A(s) \in \mathcal{R}(s)$, in low and high frequencies, respectively; $\text{diag}\{a_1, \dots, a_p\}$ is a $p \times p$ diagonal matrix whose elements are a_1, \dots, a_p ; and I_p is a $p \times p$ identity matrix.

They are with Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Autonomous University of Nuevo Leon, 66450 Av. Universidad, San Nicolas de los Garza, Mexico

¹rgalindo@gama.fime.uanl.mx, under project PAICyT IT956-11.

²miguel.floresgr@uanl.edu.mx

II. LPV CONTROL METHODOLOGY

Proposed methodology

1. Get a linear time varying state space description of a given system,
 - a) Directly when all the constitutive relations are linear time-varying,
 - b) For parameter sensitivity of solutions of nonlinear systems (see [12]),
 - c) Approximate a non-linear system by polynomials, a general methodology still under development is Tensor Product (see [16]),
 - d) Linearize a non-linear system along a time varying trajectory, arriving to,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= F(t)\xi(t) + G(t)u(t) \\ y(t) &= H(t)\xi(t), t \in [0, +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

where $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ and $y(t) \in \mathbb{R}^p$ are the state, the input and regulated output of the system; and $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ are continuous-time functions,

- 1) Get a Multiafin Parametric time-Varying (MPV) state space description of the system $P(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{p \times m}$,
 - a) Directly defining parameters, or in a less conservative way,
 - b) Applying the polytopic covering technique (see [4]), arriving to,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= F(\theta(t))\xi(t) + G(\theta(t))u(t) \\ y(t) &= H(\theta(t))\xi(t), t \in [0, +\infty) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

where $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ is a measured or estimated continuous-time function of the plant parameters, that remains between given time-invariant bounds, *i.e.*, $\theta_i(t) \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i]$ for $i = 1, \dots, q$; and the matrices $F(\cdot)$, $G(\cdot)$ and $H(\cdot)$ are multi-affine functions of the parameter $\theta(t)$, that is,

$$F(\theta(t)) = F_0 + \prod_{i=1}^q \theta_i^k(t) F_1 + \dots + \prod_{i=1}^q \theta_i^k(t) F_q, \quad (3)$$

and analogously for $G(\theta(t))$ and $H(\theta(t))$, being either $k = 0$ or $k = 1$, and F_0, \dots, F_n time-invariant matrices. Hence, $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ varies in the convex hull of the plant, *i.e.*, the convex envelope of a set of LTI models that become by evaluating $F(t)$, $G(t)$ and $H(t)$ in the 2^q combinations of the time-invariant bounds $\underline{\theta}_i$ and $\bar{\theta}_i$, $i = 1, \dots, q$,

- 2) Suppose that at each vertex of the convex hull of the plant, *i.e.*, $P_1(s), \dots, P_{2^q}(s)$ both the \mathcal{H}_2 norms of the disturbances and the \mathcal{H}_∞ -norm of the transfer function from the output to the input of the uncertainty are bounded, and design robust stabilizing controllers $K_1(s), \dots, K_{2^q}(s)$ at each vertex of the convex hull of the plant.
- 3) Design an LPV controller $K(\theta(t))$ by interpolation of the robust controllers,
 - a) Applying the interpolation algorithm proposed by [15],

$$\left. \begin{aligned} K(\theta) &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) K_i, \\ \alpha_i(\theta(t)) &> 0, \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

where K_1, \dots, K_{2^q} are the input-output relations of $K_1(s), \dots, K_{2^q}(s)$ and, $\alpha_1(\theta(t)) = \frac{1}{\Gamma} \prod_{j=1}^q (\bar{\theta}_j - \theta_j(t))$, $\alpha_2(\theta(t)) = \frac{1}{\Gamma} \prod_{j=2}^q (\bar{\theta}_j - \theta_j(t)) (\theta_1 - \underline{\theta}_1), \dots, \alpha_{2^q}(\theta(t)) = \frac{1}{\Gamma} \prod_{k=1}^q (\theta_k(t) - \underline{\theta}_k)$, being $\Gamma := \prod_{i=1}^q (\bar{\theta}_i - \underline{\theta}_i)$, arriving to the state space realizations of $K(\theta(t))$,

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \text{diag} \{A_{k1}, \dots, A_{k2^q}\}, \\ B_k &= [B_{k1}^T \dots B_{k2^q}^T]^T, \\ C_k(\theta(t)) &= [\alpha_1(\theta(t)) C_{k1} \dots \alpha_{2^q}(\theta(t)) C_{k2^q}], \\ D_k(\theta(t)) &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) D_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

or input-output equivalent,

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \text{diag} \{A_{k1}, \dots, A_{k2^q}\}, \\ B_k(\theta(t)) &= [\alpha_1(\theta(t)) B_{k1}^T \dots \alpha_{2^q}(\theta(t)) B_{k2^q}^T]^T, \\ C_k &= [C_{k1} \dots C_{k2^q}], \\ D_k(\theta(t)) &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) D_{ki} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

- b) Interpolating the state space matrices of $K_i(s)$, that is,

$$\left. \begin{aligned} A_k(\theta(t)) &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) A_{ki}, \\ B_k(\theta(t)) &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) B_{ki}, \\ C_k(\theta(t)) &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) C_{ki}, \\ D_k(\theta(t)) &= \sum_{i=1}^{2^q} \alpha_i(\theta(t)) D_{ki}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

where $(A_{ki}, B_{ki}, C_{ki}, D_{ki})$ is the state space realization of $K_i(s)$, and $(A_k(\theta(t)), B_k(\theta(t)), C_k(\theta(t)), D_k(\theta(t)))$ is the state space realization of $K(\theta(t))$,

- 4) The control strategy must be such that the state matrix of the closed loop system has a multi-affine dependency on $\theta(t)$, so, assuring convexity. Apply the Vertex Theorem of [11] (see also [4]), in order to analyze Quadratic Stability (QS) of $K(\theta(t))$ applied to $P(\theta(t))$ in a feedback configuration,
- 5) Analyze the performance of $K(\theta(t))$ applied to $P(\theta(t))$ in a feedback configuration.

It is well known that even if the system is stable at each vertex of the convex hull of the plant, instability can be induced by the time variations of the plant parameters. Stability is assured at each vertex of the convex hull of the plant by the robust controllers designed in step 3, and the stability of the overall system is assured applying the Vertex Theorem in step 5. Also, since robust controllers are designed at each vertex in step 3, external disturbance and uncertainties are considered at each vertex, and it is assumed that these robust properties are extended to the overall MPV system, and analyzed in step 6.

This methodology is applied to two particular feedback configurations. Let $K(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ be a LPV state space description of a controller designed for $P(\theta(t))$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k(\theta(t)) x_k(t) + B_k(\theta(t)) e(t) \\ u(t) &= C_k(\theta(t)) x_k(t) + D_k(\theta(t)) e(t) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

in the feedback configuration of Fig. 1 where $y_d(t)$ is the reference input; $e(t) := y_d(t) - y(t)$ is the error signal; $d_i(t)$,

$d_o(t)$ and $d_m(t)$ are external disturbances at the input, the output and the measurement of the plant, respectively, or let LPV state space descriptions of controllers $K(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ and $K_r(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{m \times p}$,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_k(\theta(t)) x_k(t) + B_k(\theta(t)) y(t) \\ y_1(t) &= C_k(\theta(t)) x_k(t) + D_k(\theta(t)) y(t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{kr}(t) &= A_{kr}(\theta(t)) x_{kr}(t) + B_{kr}(\theta(t)) y_d(t) \\ y_2(t) &= C_{kr}(\theta(t)) x_{kr}(t) + D_{kr}(\theta(t)) y_d(t) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

respectively, in the two-parameter control configuration of Fig. 2.

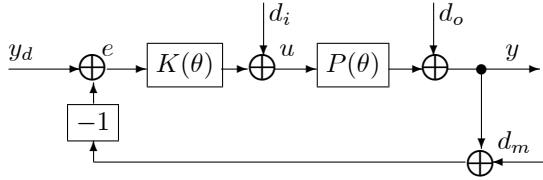


Fig. 1. Feedback system with one-parameter controller.

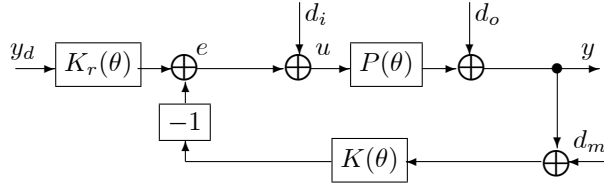


Fig. 2. Feedback system with two-parameter controller.

The role of $K(\theta(t))$ in Fig. 1 is to guarantee internal stability and to improve the performance, while in Fig. 2 the roll of $K(\theta(t))$ is to guarantee internal stability while the one of $K_r(\theta(t))$ is to improve the performance.

In the feedback configuration of Fig. 1, the closed loop system is,

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_k(t) \end{array} \right] = A_{CL1}(\theta(t)) \left[\begin{array}{c} x(t) \\ x_k(t) \end{array} \right] + B_{CL1}(\theta(t)) y_d(t) \\ y(t) = \left[\begin{array}{cc} H(\theta(t)) & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x(t) \\ x_k(t) \end{array} \right] \quad (11)$$

where,

$$A_{CL1}(\theta(t)) := \left[\begin{array}{cc} \hat{F}(\theta(t)) & G(\theta(t)) C_k(\theta(t)) \\ -B_k(\theta(t)) H(\theta(t)) & A_k(\theta(t)) \end{array} \right] \\ B_{CL1}(\theta(t)) := \left[\begin{array}{c} G(\theta(t)) D_k(\theta(t)) \\ B_k(\theta(t)) \end{array} \right], \quad (12)$$

being $\hat{F}(\theta(t)) := F(\theta(t)) - G(\theta(t)) D_k(\theta(t)) H(\theta(t))$, while in the feedback configuration of Fig. 2, the closed loop system is,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= A_{CL2}(\theta(t)) x_a(t) + B_{CL2}(\theta(t)) y_d(t) \\ y(t) &= \left[\begin{array}{ccc} H(\theta(t)) & 0 & 0 \end{array} \right] x_a(t) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

where $x_a(t) := \left[\begin{array}{ccc} x^T(t) & x_k^T(t) & x_{kr}^T(t) \end{array} \right]^T$, and,

$$A_{CL2}(\theta(t)) := \left[\begin{array}{ccc} \hat{F}(\theta(t)) & -G(\theta(t)) C_k(\theta(t)) & G(\theta(t)) C_{kr}(\theta(t)) \\ B_k(\theta(t)) H(\theta(t)) & A_k(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & A_{kr}(\theta(t)) \end{array} \right] \\ B_{CL2}(\theta(t)) := \left[\begin{array}{c} G(\theta(t)) D_{kr}(\theta(t)) \\ 0 \\ B_{kr}(\theta(t)) \end{array} \right]. \quad (14)$$

In these state space descriptions $A_{CL1}(\theta(t))$ and $A_{CL2}(\theta(t))$ in general have non-linearities in the parameters $\theta(t)$, due to the terms $G(\theta(t)) D_k(\theta(t))$, $G(\theta(t)) C_k(\theta(t))$, $G(\theta(t)) C_{kr}(\theta(t))$, and $B_k(\theta(t)) H(\theta(t))$. So, in general, multi-affine dependency cannot be guaranteed for $A_{CL1}(\theta(t))$ and $A_{CL2}(\theta(t))$, convexity is not assured and the vertex Theorem cannot be applied in closed loop, unless $G(\theta(t))$ does not depend on $\theta(t)$, that is, $G(\theta(t))$ become G . The input matrix is time invariant at least in the following cases,

- 1) Using the interpolation (5) of step 4.
- 2) For linearized Hamiltonian systems (as shown in the following), and
- 3) If a change of basis,

$$x(t) := T(\theta_{(i)}) \xi(t) \quad (15)$$

is realized such that the input matrix in new coordinates does not depend on $\theta(t)$, where $\theta_{(i)}$ is the i -vertex of the hyperbox of $\theta(t)$.

For quadratic kinetic energy functions $T(q(t), \dot{q}(t)) = \dot{q}^T(t) N(q(t)) \dot{q}(t)$ where $q(t) \in \mathbb{R}^m$ are the generalized coordinates, the generalized momentum is $p(t) = \frac{\partial L(\cdot)}{\partial \dot{q}(t)} = N(q(t)) \dot{q}(t)$, where $L(q(t), \dot{q}(t)) = T(q(t), \dot{q}(t)) - V(q(t))$ is the Lagrangian function, and the Hamiltonian function $H(p(t), q(t), t) = \left[p(t)^T \dot{q}(t) - L(q(t), \dot{q}(t), t) \right]_{\dot{q}(t)=N^{-1}(q(t))p(t)}$ is $H(p(t), q(t), t) = T(q(t), p(t)) + V(q(t)) = \frac{1}{2} p^T(t) N^{-1}(q(t)) p(t) + V(q(t))$. Hence, the non-linear Hamilton equations are,

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{\partial H(\cdot)}{\partial p(t)} = N^{-1}(q(t)) p(t) \\ \dot{p}(t) &= \frac{-\partial H(\cdot)}{\partial q(t)} + \tau(t) \\ &= \frac{-1}{2} p^T(t) \frac{\partial N^{-1}(q(t))}{\partial q(t)} p(t) - \frac{\partial V(q(t))}{\partial q(t)} \end{aligned} \quad (16)$$

that linearizing in the equilibrium point $q(t) = q_e$ and $p(t) = 0$, arrives to the state space realization,

$$A = \left[\begin{array}{cc} 0 & N^{-1}(q(t))|_{q(t)=q_e} \\ \frac{-\partial^2 V(q(t))}{\partial q^2(t)}|_{q(t)=q_e} & 0 \end{array} \right], \quad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ I_m \end{array} \right] \\ C = \left[\begin{array}{cc} I_m & 0 \end{array} \right] \quad (17)$$

having a time-invariant input matrix, where the state is $\left[\begin{array}{cc} q^T(t) & p^T(t) \end{array} \right]^T$ and the input is $\tau(t)$.

Also, $H(\theta(t))$ must not depend on $\theta(t)$ depending of the type of interpolation used in step 4. This result is summarized

in the following Lemma that gives sufficient stability conditions,

Lemma 1: The closed loop systems of Fig. 1 and Fig. 2 where the MPV plant is given by (1), are quadratically stable for all admissible $\theta(t)$ if i) the input matrix of (1) is time invariant, ii) for interpolations (6) and (7) the output matrix of (1) is also time invariant, and iii) exist a positive definite matrix $P = P^T$ such that, $PA_{CL}(\theta(i)) + A_{CL}(\theta(i))P < 0$, where $A_{CL}(\theta(t))$ is either $A_{CL1}(\theta(t))$ or $A_{CL2}(\theta(t))$.

Proof: Follows directly from (12) and (14). Since the input matrix of (1) is time invariant, then $A_{CL1}(\theta(t))$ has a multi-affine dependency on $\theta(t)$ due to the multi-affine dependency on $\theta(t)$ of (1) and the polytopic dependence on $\theta(t)$ of $K(\theta(t))$, thus, closed loop stability can be analyzed by the vertex Theorem of [11]. ■

In particular if the change of basis (15) is such that the input matrix in new coordinates does not depend on $\theta(t)$, and the MPV system at each vertex in new coordinates is,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}(\theta(i)) \\ A_{21}(\theta(i)) & A_{22}(\theta(i)) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} C_1(\theta(i)) & C_2(\theta(i)) \end{bmatrix} x(t), t \in [0, +\infty) \end{cases} \quad (18)$$

that it is assumed to be causal LTI detectable and stabilizable realizations, for $i = 1, \dots, 2^q$. Suppose that n is even, $m = n/2$, and $p = m$, such that $A_{12}(\theta(i)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{21}(\theta(i)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_{22}(\theta(i)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, and $B_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Since all the entries of $u(t)$ and $y(t)$ are linearly independent, without loss of generality, it is assumed that either B_2 or B_1 , and either $C_2(\theta(i))$ or $C_1(\theta(i))$, respectively, are non-singular matrices. Also, suppose that either $A_{12}(\theta(i))$ and $A_{21}(\theta(i))$ are non-singular matrices, as required by [7]. Then, a computational efficient methodology is the one of [8] that is based on the one of [7] to design a mixed sensitivity stabilizing controller at each vertex of $P(\theta(t))$. Since B is full column rank, a change of coordinates $\bar{x}(t) = Tx(t)$ can be used to get $TB = \begin{bmatrix} 0 & \bar{B}_2^T \end{bmatrix}^T$. In particular in [9] the cases of either $C_1(\theta(i)) = 0$ or $C_2(\theta(i)) = 0$ are considered. If $C_2(\theta(i)) = 0$ and $B_1 = 0$, coprime factorizations of $P(\theta(i))$ are,

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i(s) &= \frac{1}{(s+a)^2} B_2, \quad \tilde{D}_i(s) = \Gamma_i(s) A_{12}^{-1}(\theta(i)) C_1^{-1}(\theta(i)), \\ N_i(s) &= \frac{1}{(s+a)^2} C_1 A_{12}(\theta(i)), \quad D_i(s) = B_2^{-1} \Gamma_i(s) \end{aligned} \quad (19)$$

where $\Gamma_i(s) = \frac{1}{(s+a)^2} (s^2 I_m - s A_{22}(\theta(i)) - A_{21}(\theta(i)) A_{12}(\theta(i)))$, and a solution of the Diophantine equation is,

$$\begin{aligned} X_i(s) &= \frac{X_{1(i)}(s)s + Y_{0(i)} A_{21}(\theta(i)) A_{12}(\theta(i)) + a^3 I_m A_{12}^{-1}(\theta(i)) C_1^{-1}}{s + a} \\ Y_i(s) &= \frac{1}{s+a} (Y_{0(i)} + s I_m) B_2, \end{aligned} \quad (20)$$

where $X_{1(i)} = Y_{0(i)} A_{22}(\theta(i)) + A_{21}(\theta(i)) A_{12}(\theta(i)) + 3a^2 I_m$ and $Y_{0(i)} = A_{22}(\theta(i)) + 3a I_m$. Then, from the parametrization of all stabilizing controllers (see [5] and [18]), $K_{r(i)}(s) = \tilde{D}_{k(i)}^{-1}(s) Q_{(i)}(s)$ and $K_{(i)}(s) = \tilde{D}_{k(i)}^{-1}(s) (X_{(i)}(s) + R_{(i)}(s) \tilde{D}_{(i)}(s))$ where $\tilde{D}_{k(i)}(s) := Y_{(i)}(s) - R_{(i)}(s) \tilde{N}_{(i)}(s)$, and $R_{(i)}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ and $Q_{(i)}(s) \in$

\mathcal{RH}_∞ are free control parameters. Let $R_{(i)}(s)$ be $r_{(i)} I_m$ and $Q_{(i)}(s)$ be $q_{(i)} I_m$ where $r_{(i)} \in \mathbb{R}$ and $q_{(i)} \in \mathbb{R}$ solve a mixed sensitivity problem (see [9]).

These results are illustrated in the following section.

III. EXAMPLE

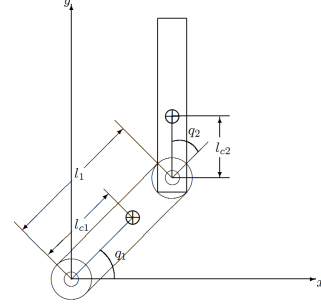


Fig. 3. Two DOF planar rotational robot.

In this section we apply the proposed LPV control methodology to the non-linear and LPV models of two degrees of freedom planar rotational robot depicted in Fig. 3, where $q_1(t)$ and $q_2(t)$ are the angular positions. These models are obtained from the Hamilton equations. The kinetic and potential energies of this robot are,

$$\begin{aligned} T(q(t), \dot{q}(t)) &= \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) N(q(t)) \dot{q}(t) \\ N(q(t)) &:= \begin{bmatrix} \gamma_1 + m_2 l_{c2} [l_1 \cos(q_2(t)) + l_{c2}] & m_2 l_{c2} [l_1 \cos(q_2(t)) + l_{c2}] \\ m_2 l_{c2} [l_1 \cos(q_2(t)) + l_{c2}] & \frac{1}{2} m_2 l_{c2}^2 \end{bmatrix} \\ \text{and} \\ V(q(t)) &= -m_2 g [(l_{c1} + l_1) \sin(q_1(t)) + l_{c2} \sin(q_1(t) + q_2(t))] \end{aligned} \quad (21)$$

respectively, where $\gamma_1 := m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + I_2$ and $q(t) := [q_1(t) \ q_2(t)]^T$. The non-linear model is given by (16). Linearizing in the equilibrium point $q(t) = q_e = \frac{\pi}{2}$, and $p(t) = 0$, the linear model is given by (17), where,

$$\begin{aligned} N^{-1}(q(t))|_{q(t)=q_e} &= \begin{bmatrix} \theta_1(t) m_2(t) l_{c2}^2 + \theta(t) I_2 & -\theta_1(t) m_2(t) \gamma_1 - \theta_1(t) I_2 \\ -\theta_1(t) m_2(t) \gamma_1 - p I_2 & \theta_1(t) m_2(t) \gamma_2 + \theta_1(t) \gamma_3 \end{bmatrix}, \\ \frac{-\partial^2 V(q(t))}{\partial q^2}|_{q(t)=q_e} &= \begin{bmatrix} m_2(t) g l_1 + m_2(t) g l_{c2} + m_1 l_{c1} & m_2(t) g l_{c1} \\ m_2(t) g l_{c1} & m_2(t) g l_{c1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

being $\gamma_1 = l_{c2}^2 + l_1 l_{c2}$, $\gamma_2 = l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c1}$, $\gamma_3 = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2$, and the considered time varying plant parameters are $m_2(t) \in [2, 6]$ and $\theta_1(t) := 1/[m_2(l_1^2 I_2 + l_{c2}^2 I_1 + m_1 l_{c1}^2 l_{c2}) + m_1 l_{c1}^2 + I_1^2] \in [3.71, 5.53]$, arriving to an state space MPV representation of the form (2). Also, this linear model has the structure of (18). So, following the procedure of [9], robust stabilizing controllers are designed for each vertex of the convex hull of the plant, where the coprime factorizations of the plant are given by (19) and the solution of the Diophantine Equation is given by (20), and their free parameters are fixed solving a mixed sensitivity criterion (see [9]), arriving to the control parameters

$w_{h(i)} = 100$ for $i = 1, \dots, 4$ which is a frequency in the high frequency bandwidth of $P(\theta_{(i)})$, and $a_{(1)} = 8$ for $m_2(t) = 2$ and $\theta_1(t) = 3.71$, $a_{(2)} = 9$ for $m_2(t) = 6$ and $\theta_1(t) = 3.71$, $a_{(3)} = 9$ for $m_2(t) = 2$ and $\theta_1(t) = 5.53$, and $a_{(4)} = 10$ for $m_2(t) = 6$ and $\theta_1(t) = 5.53$.

Parameter	Value	Unit
l_1	0.450	m
l_{c1}	0.091	m
l_{c2}	0.048	m
m_1	23.902	Kg
I_1	1.266	$Kg\ m^2$
I_2	0.093	$Kg\ m^2$
g	9.81	$\frac{m}{s^2}$

Table I. Parameters of the two DOF planar rotational robot

In the simulation we use the data shown in Table 1 borrowed from [9], the initial condition is $q(0) = [-\frac{\pi}{2}, 0]^T$, the reference input is $y_d = [\frac{\pi}{2}, 0]^T$ and the time variations of the parameters are $m_2(t) = 2 \sin(100t) + 4$ and $p(t) = 0.89 \sin(100t + \frac{\pi}{2}) + 4.63$. Also, the robot is tested with an output additive disturbance $d_o(t) = 0.4 \sin(0.8t)$, $t > 3$ sec.

From the LMI toolbox of MatLab, quadratic stability is assured solving the feasibility problem given by $P A_{CL}(\theta_{(i)}) + A_{CL}(\theta_{(i)})^T P < 0$ of Lemma 1, and the result for the one-parameter feedback configuration of Fig. 1 is,

$$P = \begin{bmatrix} 0.532 & 0.046 & -0.005 & -0.051 & 0.088 & -0.007 & 0.036 & -0.004 \\ 0.046 & 0.310 & 0.009 & -0.141 & 0.002 & -0.002 & 0.140 & -0.007 \\ -0.005 & 0.009 & 0.002 & -0.024 & -0.001 & 0.000 & 0.013 & 0.007 \\ -0.051 & -0.141 & -0.024 & 0.384 & -0.025 & -0.013 & -0.224 & -0.123 \\ 0.088 & 0.002 & -0.001 & -0.025 & 0.028 & 0.006 & 0.018 & 0.013 \\ -0.007 & -0.002 & 0.000 & -0.013 & 0.006 & 0.013 & 0.010 & 0.022 \\ 0.036 & 0.140 & 0.013 & -0.224 & 0.018 & 0.010 & 0.162 & 0.078 \\ -0.004 & -0.007 & 0.007 & -0.123 & 0.013 & 0.022 & 0.078 & 0.149 \end{bmatrix} \quad (23)$$

and for the two-parameter feedback configuration of Fig. 2 is,

$$P = \begin{bmatrix} 0.126 & 0.01 & -0.001 & -0.01 & 0.021 & -0.001 & 0.007 & -0.002 & 0.002 & -0.017 & 0.001 & -0.019 \\ 0.01 & 0.081 & 0.002 & -0.033 & -0.000 & -0.001 & 0.033 & -0.006 & -0.000 & -0.005 & 0.005 & -0.051 \\ -0.001 & 0.002 & 0.0005 & -0.005 & -0.000 & -0.000 & 0.002 & 0.000 & -0.000 & -0.000 & 0.001 & 0.000 \\ -0.01 & -0.033 & -0.005 & 0.084 & -0.004 & -0.001 & -0.047 & -0.015 & -0.001 & 0.000 & -0.018 & -0.003 \\ 0.021 & -0.000 & -0.000 & -0.004 & 0.007 & 0.001 & 0.003 & 0.001 & 0.001 & 0.000 & 0.001 & 0.001 \\ -0.001 & -0.001 & -0.000 & -0.001 & 0.001 & 0.003 & 0.000 & 0.003 & 0.001 & 0.007 & 0.000 & 0.006 \\ 0.007 & 0.033 & 0.002 & -0.047 & 0.003 & 0.000 & 0.034 & 0.009 & 0.001 & -0.000 & 0.011 & -0.004 \\ -0.002 & -0.006 & 0.000 & -0.015 & 0.001 & 0.003 & 0.009 & 0.022 & 0.001 & 0.007 & 0.007 & 0.042 \\ 0.002 & -0.000 & -0.000 & -0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.028 & 0.109 & 0.001 & 0.006 \\ -0.017 & -0.005 & -0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.007 & -0.000 & 0.007 & 0.109 & 0.992 & 0.005 & 0.055 \\ 0.001 & 0.005 & 0.001 & -0.018 & 0.001 & 0.000 & 0.011 & 0.007 & 0.001 & 0.005 & 0.039 & 0.153 \\ -0.019 & -0.051 & 0.000 & -0.003 & 0.001 & 0.006 & -0.004 & 0.042 & 0.006 & 0.055 & 0.153 & 1.418 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A comparison of the positions of the one-parameter and two-parameter feedback configurations is shown in Figures 4 and 5, respectively, and a comparison of the plant inputs is shown in Figures 6 and 7, respectively. Also, it is shown a comparison of the LPV controller gotten by the interpolations (6) and (7), applied to the LPV plant and to the non-linear plant. In all these cases, the time response of Fig. 4 is less than the one of 5 while the price to pay is that the overshoot of Fig. 4 is higher than the one of 5 and the one parameter

feedback configuration needs more plant input energy than the two parameter feedback configuration, as shown in Figures 6 and 7. As expected stability is guaranteed in spite of the time variations of the parameters, the output additive disturbance and of the unmodelled dynamics present for the non-linear model. In the two parameter feedback configuration of Fig. 5 there are small oscillations in $q_1(t)$ with frequency 0.8 rad/sec. due to the output additive disturbance, while it is not appreciable for the one parameter feedback configuration of Fig. 4. In all the cases, the stationary state error is small as shown in Figures 4 and 5. Also, the overshoot of the plant input is bigger in Fig. 6 than in Fig. 7, and the oscillations of the plant input are better attenuated at the plant input in the feedback configuration of one parameter than in the feedback configuration of two parameters.

IV. CONCLUSIONS

An LPV control methodology for MPV systems is proposed. An LPV controller is designed for an MPV plant, interpolating robust stabilizing controllers. Quadratic stability is assured for the feedback configurations of one or two parameters. A comparison of the LPV controller gotten by two types of interpolation, applied to the LPV plant and to the non-linear plant in one and two parameter feedback configurations, is presented.

This results show that, in all the cases, quadratic stability is achieved in spite of the time variation of the parameters, the output additive disturbance, and unmodelled dynamics. Also, the time response is smooth and with a small stationary state error.

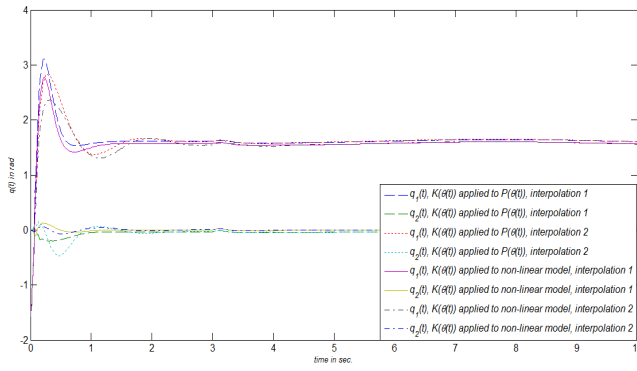


Fig. 4. Positions $q(t)$ for the one parameter feedback configuration of $K(\theta(t))$ applied to $P(\theta(t))$ and to the non-linear model, where interpolation 1 is given by (6) and interpolation 2 is given by (7).

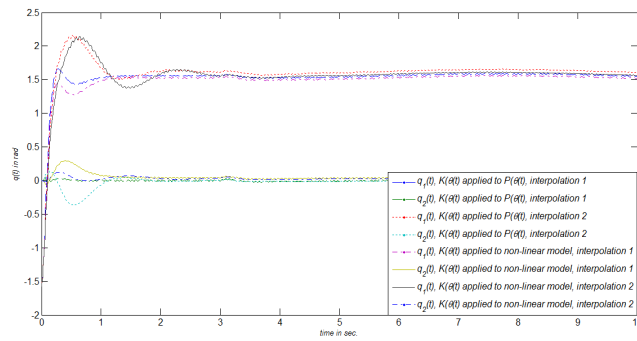


Fig. 5. Positions $q(t)$ for the two parameter feedback configuration of $K(\theta(t))$ applied to $P(\theta(t))$ and to the non-linear model, where interpolation 1 is given by (6) and interpolation 2 is given by (7).

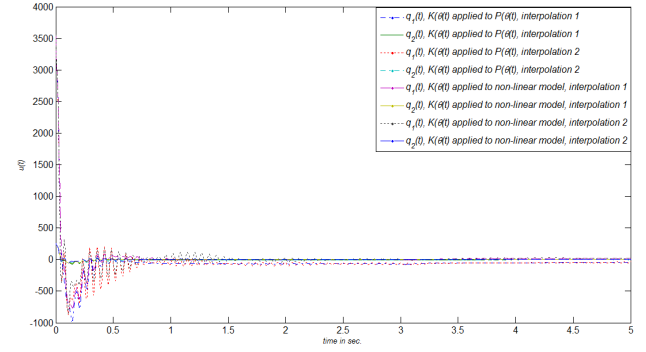


Fig. 6. Control law $u(t)$ for the one parameter feedback configuration of $K(\theta(t))$ applied to $P(\theta(t))$ and to the non-linear model, where interpolation 1 is given by (6) and interpolation 2 is given by (7).

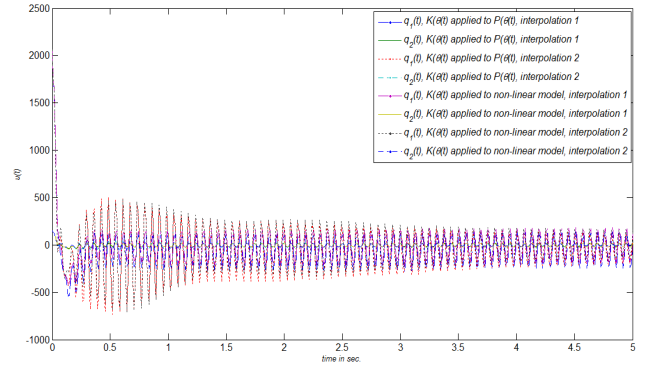


Fig. 7. Control law $u(t)$ for the two parameter feedback configuration of $K(\theta(t))$ applied to $P(\theta(t))$ and to the non-linear model, where interpolation 1 is given by (6) and interpolation 2 is given by (7).

REFERENCES

- [1] Abdulla A. and Ziribi M., "Model reference control of LPV systems", J. of Franklin Institute, vol. 346, pp. 854-871, 2009.
- [2] P. Apkarian, and P. Gahinet, A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers, IEEE Transaction on Automatic Control (TAC), Vol. 40, pp. 853-864, 1995.
- [3] Apkarian P. and Adams R., "Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems", IEEE Trans. on Control Systems Technology, vol. 6, No. 1, 1998.
- [4] F. Amato, Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters, Springer, 2006.
- [5] Desoer C. A., Liu R., Murray J. and Saeks R., "Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis", IEEE Trans. on Autom. Control, pp. 399-412, 1980.
- [6] R. Galindo, M. Malabre, V. Kučera, " H_∞ Control for LTI Systems", Conf. on Decision and Control, 2004.
- [7] R. Galindo, "Parametrization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I Journal of Systems and Control Engineering, vol. 223 (I7), pp. 957-971, 2009.
- [8] R. Galindo and C. Conejo, "A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems", International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and automatic Control (CCE), 2012.
- [9] A. Bonilla, R. Galindo, "Expresión analítica de la doble factorización coprima para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada (Analytic expression of the doubly coprime factorization for square systems and mixed sensitivity)", Mexican Association of Automatic Control, 2011.
- [10] R. Galindo, E. Ibarra, M. Jimenez (2012), "Comparative Study of the Speed Robust Control of a DC Motor", World Automation Congress (WAC).
- [11] H. P. Horisberger y P. R. Belanger, "Regulators for LTI Plants with Uncertain Parameters", IEEE TAC, pp. 705-708, 1976.
- [12] Kolonic F., Poljugan A., and Petrovic I., "Tensor Product Model Transformation-based Controller Design for Gantry Crane Control System - An Application Approach", Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 3, No. 4, 2006.
- [13] V. Kučera, Discrete linear control, The polynomial equation approach, Wiley, Chichester, 1979.
- [14] Natesan K., Gu D-W, and Postlethwaite I., "Design of linear parameter varying trajectory tracking controllers for an unmanned air vehicle", Proc. of the Inst. of Mechanical Engineers, Part G: J. of Aerospace Engineering, pp. 395-402, 2010.
- [15] P. C. Pellanda, P. Apkarian, H. D. Tuan, "Missile Autopilot Design via Multi-channel LFT/LPV Control Method", International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 12, pp. 1-20, 2002.
- [16] Rugh W. J., Linear System Theory, 2nd ed., Prentice Hall, 1996.
- [17] Youla D. C., Jabr H. A. Bongiorno J. J., "Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case", TAC, pp. 319-338, 1976.
- [18] M. Vidyasagar, Control System Synthesis: A Factorization Approach, Massachusetts: The MIT Press Cambridge, 1985.
- [19] K. Zhou, P. P. Khargonekar, J. Stoustrup, and H. H. Niemann, Robust performance of systems with structured uncertainties in state space, Automatica, Vol. 31, No. 2, pp. 249-255, 1995.

Bibliografía

- [1] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1995.
- [2] K. Glover and D. McFarlane, “Robust stabilization of normalized coprime factor plant descriptions with \mathcal{H}_∞ -bounded uncertainty,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, pp. 821–830, Aug 1989.
- [3] D. McFarlane and K. Glover, “A loop-shaping design procedure using \mathcal{H}_∞ synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 759–769, Jun 1992.
- [4] H. P. Horisberger and P. R. Belanger, “Regulators for linear, time invariant plants with uncertain parameters,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 21, pp. 705–708, Oct 1976.
- [5] P. Apkarian and P. Gahinet, “A convex characterization of gain-scheduled \mathcal{H}_∞ controllers,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 853–864, May 1995.
- [6] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker, “Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems,” *American Control Conference*, vol. 1, pp. 856–860, June 1994.
- [7] A. Amato, *Robust Control of Linear Systems Subject to Uncertain Time-Varying Parameters*. Springer, 2006.
- [8] A. Abdullah and M. Zribi, “Model reference control of LPV systems,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 346, pp. 854–871, Nov 2009.

- [9] P. Apkarian and R. J. Adams, “Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 6, pp. 21–32, January 1998.
- [10] K. Natesan, D.-W. Gu, and I. Postlethwaite, “Design of linear parameter varying trajectory tracking controllers for an unmanned air vehicle,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, vol. 224, pp. 395–402, April 2010.
- [11] P. Apkarian, P. Gahinet, and J. Biannic, “Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of a missile via LMIs,” *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pp. 3312–3317, December 1994.
- [12] J.-Y. Shin, G. J. Balas, and A. M. Kaya, “Blending methodology of Linear Parameter Varying control synthesis of F-16 aircraft system,” *NASA/CR-2001-211237 ICASE Report No. 2001-33*, pp.—, October 2001.
- [13] H. Kajiwara, P. Apkarian, and P. Gahinet, “LPV techniques for control of an inverted pendulum,” *IEEE Control Systems*, vol. 19, pp. 44–54, Feb 1999.
- [14] G. J. Balas, “Linear, parameter-varying control and its application to a turbofan engine,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, pp. 763–796, July 2002.
- [15] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*. The MathWorks Inc., 1994.
- [16] J. Löfberg, “Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB,” in *Proceedings of the CACSD Conference*, (Taipei, Taiwan), 2004.
- [17] L. Xie, M. Fu, and C. E. de Souza, “ \mathcal{H}_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, pp. 1253–1256, Aug 1992.
- [18] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker, “Self-scheduled \mathcal{H}_∞ control of linear parameter-varying systems: a design example,” *Automatica*, vol. 31, pp. 1251–1261, September 1995.

- [19] P. Pellanda, P. Apkarian, and H. Tuan, “Missile autopilot design via a multi-channel LFT/LPV control method,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2001.
- [20] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. M.I.T. Press, 1985.
- [21] A. Bonilla and R. Galindo, “Expresión analítica de la doble factorización coprima para sistemas cuadrados y sensibilidad mezclada,” *Asociación de México de Control Automático*, pp.–, Oct 2011.
- [22] R. Galindo, “Parameterization of all stable controllers stabilizing full state information systems and mixed sensitivity,” *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part I: journal of Systems and Control Engineering*, vol. 223, pp. 957–971, Oct 2009.
- [23] G. Leitmann, “Guaranteed asymptotic stability for some linear systems with bounded uncertainties,” *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 101, pp. 212–216, 1979.
- [24] B. Barmish, “Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain linear system,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 46, pp. 399–408, 1985.
- [25] M. Green and D. J. Limebeer, *Linear Robust Control*. Prentice Hall, 1995.
- [26] E. Martínez and R. Galindo, “Quadratic stability methodology by parameter dependent state feedback for LPV systems,” *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE)*, pp. 1–6, Sept 2012.
- [27] D. C. Youla, H. A. Jabr, and J. J. Bongiorno, “Modern wiener-hopf design of optimal controllers - part II: The multivariable case.,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-21, pp. 319–338, Jun 1976.
- [28] V. Kučera, “Stability of discrete linear feedback systems,” *Proceedings of the 6th IFAC World Congress*, pp.–, 1975.

- [29] C. A. Desoer, R. Liu, J. Murray, and R. Saeks, “Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 25, pp. 399–412, Jun 1980.
- [30] R. Galindo, M. Malabre, and V. Kučera, “Mixed sensitivity \mathcal{H}_∞ control for LTI systems,” *IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 2, pp. 1331–1336, Dec 2004.
- [31] R. Galindo and C. D. Conejo, “A parametrization of all one parameter stabilizing controllers and a mixed sensitivity problem, for square systems,” *International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, pp. 1–6, Sep 2012.
- [32] G. Zames, “On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems parts I and II,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, Apr 1966.
- [33] C. N. Nett, C. Jacobson, and M. J. Balas, “A connection between state-space and doubly coprime fractional representations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, pp. 831–832, Sep 1984.
- [34] R. Kelly and V. Santibanez, *Control de movimientos de robots manipuladores*. Pearson Prentice Hall, 2003.
- [35] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali, “The LMI control toolbox,” *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 3, pp. 2038–2041, Dec 1994.